

Michael KLEINE, Hollfeld

Analyse von Grundvorstellungen – Möglichkeiten und Grenzen –

„Die Analyse von Grundvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern wird letztendlich immer zum Scheitern verurteilt sein, weil sich mentale Modelle nicht präzise erfassen lassen.“ Diese Aussage könnte ein behavioristische Sichtweise darstellen, wenn man einen verhaltensorientierte Standpunkt vertritt. Zielt man jedoch auf Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern (im Folgenden kurz: Schüler) mit dem Ziel praxisrelevanter Implikationen ab um sich aufgrund der Analyse kognitiver Vorgänge dem Verständnis mathematischer Inhalte zu nähern, dann erscheint die Untersuchung von Grundvorstellungen ein wichtiger Bestandteil eines solchen Vorgehens zu sein. Dieser Beitrag stellt einen Abriss über den derzeitigen Stand der Forschung dar, unter denen Grundvorstellungen in mathematischen Testsituationen untersucht werden.

1. Verortung von Grundvorstellungen

Grundvorstellungen werden aus verschiedenen Perspektiven betrachtet [1]: Sie etikettieren einerseits fachbezogene Strukturen mathematischer Inhalte zu realen Sachkontexten indem diese auf individuelle kognitive Modelle abgebildet werden. Andererseits projizieren sie mentale Modelle auf mathematische Modelle in realen Situationen. Kurz: Sie beschreiben Beziehungen zwischen Mathematik, Realität und mentalen Strukturen. Je nach Perspektive werden dabei unterschiedliche Aspekte von Grundvorstellungen betont: Der *normative* Aspekt beschreibt, was sich Schüler unter mathematischen Inhalten vorstellen sollen. Mit dem *deskriptiven* Aspekt werden die individuellen kognitiven Strukturen beschrieben, die tatsächlich kognitiv aktiviert werden. Als *segmentiver* Aspekt soll losgelöst von dem Einzelfall die Ausprägung von Grundvorstellungen bezeichnet werden, die für eine Gruppe von Schülern aufgrund ihrer gezeigten schriftlichen Aufzeichnungen in mathematischen Tests postuliert wird. Im Folgenden sollen für jeden einzelnen Aspekte die entwickelten theoretische und/ oder methodologische Bausteine skizziert werden, mit denen Grundvorstellungen unter den bezeichneten Aspekten analysiert werden.

2. Normative Aspekte

Um Grundvorstellungen bei Schülern analysieren zu können, steht zunächst das *theoretische Modell* im Mittelpunkt, das Grundvorstellungen in den Prozess mathematischen Arbeitens verankert. In diesem Ansatz lassen sich Grundvorstellungen innerhalb eines Kreislauf mathematischen Arbeitens

([2], [3]) an den Übergängen zwischen Mathematik und Realität verorten. Sie sind für Individuen sozusagen die Brückenglieder zwischen mathematischer und realer Halbebene.

Innerhalb dieses Arbeitsprozesses lassen sich Grundvorstellungen, die notwendig erscheinen um sachbezogen zu arbeiten, *identifizieren* und nach dem Ausmaß der kognitiven Anforderungen, die normativ zugrunde gelegt werden, hierarchisch *klassifizieren* ([2], [4]). Die Klassifikation bezieht sich dabei auf die Qualität der notwendigen Grundvorstellungen im Sinne einer „Intensität“. So werden pragmatisch (1) elementare Grundvorstellungen, die handlungsnahen Vorstellungen beschreiben, bei denen einzelne Wertepaare berücksichtigt werden (z.B. für die Bruchrechnung Anteils-, Operator- oder Verhältnisvorstellungen) von (2) erweiterten Grundvorstellungen unterschieden, bei denen elementare Grundvorstellungen entweder nicht-trivial kombiniert werden (z.B. Wachstumsfaktoren in der Bruchrechnung als Kombination von Bruch- und arithmetischen Vorstellungen) oder das Arbeiten von unmittelbaren Handlungen losgelöst wird und Wertebereiche im funktionalen Sinn betrachtet werden. Die Stufe der komplexen Grundvorstellungen mit nicht-trivialen Kombinationen erweiterter Grundvorstellungen ist in der unteren Sekundarstufe weitgehend ohne Bedeutung. Fügt man noch eine Klasse hinzu, bei der zur Bearbeitung mathematischer Aufgaben keine Grundvorstellungen notwendig sind, dann ergibt sich ein vierkategorielles Schema, das das Anforderungsniveaus bei der Aktivierung von Grundvorstellungen durch die Variable „Grundvorstellungsintensität“ [4] beschreibt.

Diese theoretische Fundierung und Klassifikation ist für die Analyse von Grundvorstellungen eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung. Innerhalb eines didaktischen Modells [1] ist der normative Aspekt sicherlich auch allein als Leitidee im Unterricht einsetzbar, für die Analyse von Grundvorstellungen im obigen Sinn stellt der normative Aspekt dagegen den Orientierungsmaßstab dar, anhand derer empirische Befunde beurteilt werden.

3. Deskriptive Aspekte

Die Analyse individueller Vorstellungen umfasst unter dem deskriptiven Aspekt sowohl Verschriftlichungsprozesse als auch Interviewstudien. Ziel dieses Vorgehens ist es eine möglichst detaillierte Sicht auf die dem mathematischen Arbeiten zugrunde liegenden kognitiven Strukturen. Bei der Analyse individueller *Verschriftlichungen* handelt es sich auf dieser Ebene insbesondere um Übersetzungsprozesse zwischen realen Situationen und mathematischen Modellen. In Bezug auf Vorstellungen ist dabei insbesondere die Konkretisierung von Rechentermen interessant, wie sie bei der Suche von sogenannten Rechengeschichten erforderlich sind [5]. In In-

terviews lassen sich in *Einzelfallstudien* sehr detailliert die Denkstrukturen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben erfassen. Dieses Vorgehen wird durch *periodische Interviews* reichhaltiger, wenn sich über verschiedene Messzeitpunkte hinweg die Entwicklung von Vorstellungen untersuchen lassen. In vorläufigen Befunden zur Bruchrechnung zeigt sich beispielsweise, dass ein formaler Umgang mit Brüchen oftmals beherrscht wird, defizitäre Strukturen jedoch durch Vermeidungsverhalten und subjektive Strategien zu überwinden versucht werden [6]. Eine Ausrichtung auf deskriptive Aspekte hat zwar den Vorteil einer differenzierten Analyse, den Nachteil jedoch einer sehr begrenzten Aussagekraft hinsichtlich der Reichweite der Befunde. Hierfür scheinen Analysen geeignet, die den folgenden Aspekt umfassen.

4. Segmentive Aspekte

Betrachtet man Grundvorstellungen unter dem segmentiven Aspekt, so hat man eine Gruppe von Schülern im Fokus, um Aussagen über derartige Gesamtheiten zu machen. Die Untersuchungen gehen dabei oftmals mit dem Kompromiss einher, dass die analytische Differenziertheit in Bezug auf individuelle kognitive Strukturen vergrößert wird. Bei der quantitativen Analyse zeigt sich einerseits, dass die normativ definierte Variable „Grundvorstellungsintensität“ in Regressionsanalysen zu *Leistungsstudien* wesentlich zur Varianzaufklärung der empirischen Schwierigkeit bei begrifflichen und mathematischen Modellierungsaufgaben beiträgt [4]. Durch einen Vergleich zwischen den Fähigkeiten verschiedener Schülergruppen konnte darüber hinaus die normative hierarchische Anordnung auch als empirisches *Stufungsmodell* eingesetzt werden [2] um das Ausmaß aktivierter Grundvorstellungen zu beschreiben. Ferner werden zurzeit Analysen durchgeführt, die auch die *Lösungsmuster* im Sinne von Rechenwegen als Ausdruck struktureller kognitiver Organisation in Abhängigkeit von der erfolgreichen Bearbeitung untersuchen.

5. Zusammenfassung und Ausblick

Die bisherigen Ausführungen betrachten die Analyse von Grundvorstellungen unter verschiedenen Aspekten. In den letzten Jahren lag das Augenmerk dabei in der theoretischen und empirischen Forcierung der Grundvorstellungsforschung. Dabei ist es in zahlreichen Analysen gelungen, Grundvorstellungen aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten.

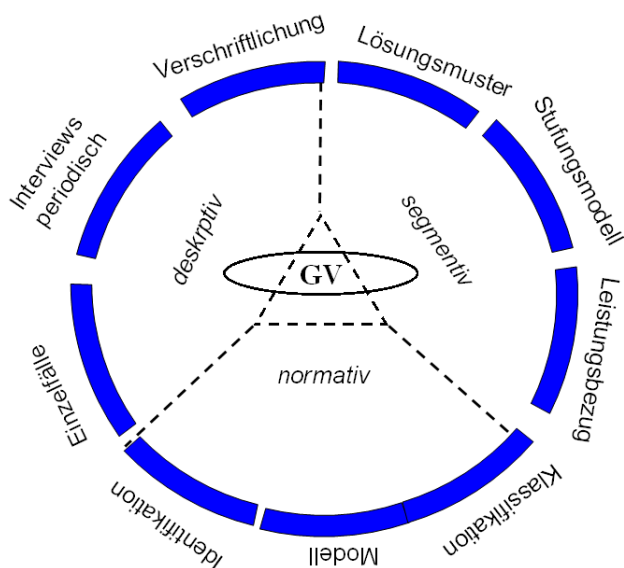


Abbildung 1

Multiple Analyse von Grundvorstellungen

Abbildung 1 zeigt dabei, dass für eine differenzierte Erfassung von Grundvorstellungen mit verschiedenen Instrumenten auf das Konstrukt geschaut werden muss um sowohl eine detaillierte als auch eine umfassende Sichtweise auf die kognitiven Strukturen einzunehmen. Die verschiedenen Aspekte sollen dabei im Sinne einer 360°-Umschau die verschiedenen Facetten von Grundvorstellungen betonen. Es wird die Aufga-

be im Folgenden sein, diese multiple Analyse in Bezug auf mathematische Teilgebiete konsequent umzusetzen, um auf diese Weise eine neue Qualität der Erkenntnis zu erhalten und Implikationen für die Praxis zu fundieren.

Literatur

- [1] R. vom Hofe: Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg, Spektrum 1995.
- [2] M. Kleine: Quantitative Erfassung von mathematischen Leistungsverläufen in der Sekundarstufe I. Franzbecker, Hildesheim 2004.
- [3] R. vom Hofe: Grundbildung durch Grundvorstellungen. Mathematik Lehren, 118, 4-8, 2003.
- [4] W. Blum, R. vom Hofe, A. Jordan, M. Kleine: Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In M. Neubrand (Hrsg.), Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland (S. 145-158). Wiesbaden, VS-Verlag 2004.
- [5] M. Kleine & E. Fischer: Welche Aufgaben passen zu dem Term? mathematica didactica, 28, 88-103, 2005
- [6] S. Wartha: Grundvorstellungen in der Bruchrechnung. Eingereichte Dissertation. Universität Regensburg, in Vorbereitung.