Sebastian WARTHA, Bielefeld

# Kompetenzen im Bruchrechnen – die Rolle von Grundvorstellungen

## 1. Motivation und Forschungseinbettung

Zur Bruchrechnung liegen einerseits eine Vielzahl von Studien vor, die normativ verschiedene Aspekte und Interpretationen von Bruchzahlen diskutieren, andererseits deskriptive Analysen an Lernenden, die auf die individuelle Begriffsgenese und typische Fehler fokussieren (Padberg, 2002). Die verschiedenen Zahlaspekte lassen sich im Wesentlichen zwei Grundvorstellungen (GVen) zuordnen, die im Sinne von vom Hofe (1995) als mentale Modelle aufgefasst werden und zur Beschreibung von Denkprozessen beim mathematischen Arbeiten herangezogen werden.

(1) GV des Bruchs als (statischer) Operand: Der Bruch als Anteil, Maßzahl, Quasikardinalzahl, Quasiordinalzahl oder als Skalenwert stellt einen Zustand dar.

(2) GV des Bruchs als (dynamischer) Operator: Der Bruch als „Zahlfunktion“, die auf eine Größe wirkt, bzw. als Vergleichsinstrument, das eine Relation zwischen zwei Größen herstellt, beschreibt eine Änderung oder eine Handlung, die einen Zustand in einen anderen Zustand überführt.

In die Testinstrumente des DFG-Projekts PALMA (Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik, vgl. vom Hofe et al., 2005) wurde eine Subskala zur Bruchrechnung implementiert, die eine quantitative Analyse von Kompetenzen im Bruchrechnen von Klasse 5 bis 7 an einer repräsentativen Stichprobe erlaubt. Darüber hinaus wurden am Ende der Jahrgangsstufen 6 und 7 Interviewserien (jeweils N=36) zur Bruchrechnung durchgeführt, die die Rolle von GVen im Lösungsprozess fokussieren.

## 2. Ergebnisse der PALMA-Subskala zur Bruchrechnung

Die Subskala zur Bruchrechnung besteht aus 38 Items, die neben den oben beschriebenen GVen auch Rechenfähigkeiten, Vorstellungen zur Ordnung und Dichte sowie Anwendungsaspekte von Brüchen in den verwandten Gebieten Verhältnisse und Prozentbegriff testen. Durch die Skalierung der Daten nach dem einparametrigen Raschmodell werden den Aufgaben Schwierigkeitsparameter und den Testpersonen Fähigkeitswerte zugeordnet, die einen Vergleich zwischen den Jahrgangsstufen zu unterschiedlichen Messzeitpunkten (MZPen) erlauben (Kleine, 2004).

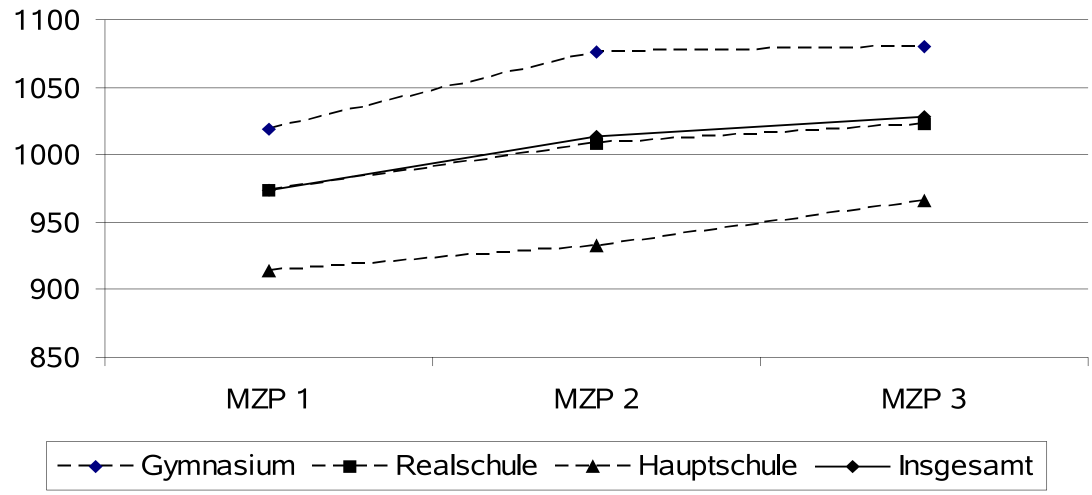


Abb. 1: Längsschnittliche Entwicklung von Kompetenzen im Bruchrechnen (Längsschnittstichprobe N=1551): MW=1000, SD=100

In Abb. 1 ist die längsschnittliche Entwicklung von Kompetenzen im Bruchrechnen nach Schularten dargestellt. Während in der sechsten Klasse (Intervall zwischen MZP 1 und 2) in allen Schularten signifikante Zuwächse zu verzeichnen sind, stagnieren die Leistungswerte am Gymnasium während der 7. Jahrgangsstufe auf hohem Niveau. Als günstig erweist sich für die Hauptschule der in dieser Schulart entzerrte Lehrplan, da deutliches Ansteigen der Kompetenzen während der siebten Jahrgangsstufe festzustellen ist. Hier konnten bei niedrigerer Ausgangslage im Durchschnitt gleiche Fortschritte (über eine halbe SD in zwei Schuljahren) wie an den anderen Schulformen erreicht werden.

Die hohen Streuungen der Kompetenzwerte der Gesamtstichprobe steigen in beiden Messintervallen an, die Verringerung der Streuung der Leistungswerte innerhalb der Schularten zu MZP 2 wird durch das Auseinanderdriften der mittleren Kompetenzwerte wieder aufgehoben. Insofern ergeben sich aus den Analysen keine Anhaltspunkte, dass sich die frühe Selektion im dreigliedrigen Schulsystem insgesamt im Sinne einer individuellen Leistungsförderung auswirkt.

## 3. Aufgabenanalysen

Zu den Aufgaben der Subskala wurden Analysen durchgeführt, die Hauptfehler in ihrem quantitativen Ausmaß beschreiben. Ein Beispiel ist das Aufgabenpaar „Herr Brinkmeier“.

*Herr Brinkmeier A (5. Jgst)*

*Herr Brinkmeier hat bei einer Fernsehlotterie gewonnen. Er möchte den sechsten Teil seines Gewinns einem Kinderheim spenden. Sein Gewinn beträgt 2400 €. Wie viel Geld spendet er?*

*Herr Brinkmeier B (7. Jgst)*

*Herr Brinkmeier hat bei einer Fernsehlotterie gewonnen. Er möchte ein Sechstel seines Gewinns einem Kinderheim spenden. Sein Gewinn beträgt 2400 €. Wie viel Geld spendet er?*

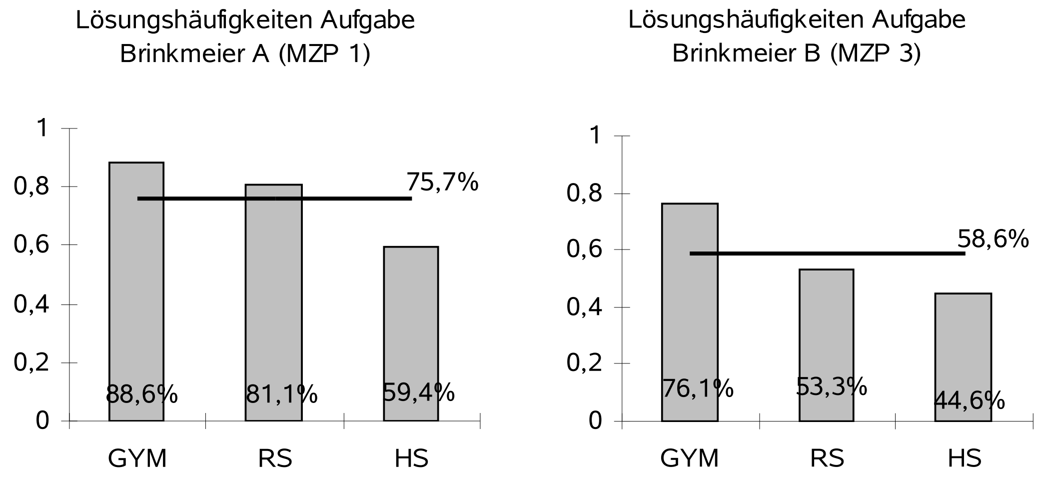


Abb. 2: Aufgabenpaar Brinkmeier mit Lösungshäufigkeiten

Während die Aufgabe Herr Brinkmeier A rund drei Viertel aller Schüler in der 5. Jahrgangsstufe bearbeiten konnten, war die Lösungshäufigkeit der Version B in der 7. Jahrgangsstufe deutlich niedriger. Zur Bearbeitung der scheinbar strukturgleichen Aufgaben sind unterschiedliche GVen zu aktivieren. Während Version A („der sechste Teil“) mit GVen aus dem Primarbereich (Division) zu lösen sind, ist bei Version B („ein Sechstel von“) die Aktivierung von GVen zu Brüchen erforderlich: Entweder der GV des Bruchs als Operator (1/6 von 2400 über multiplikative Anteilbildung) oder der GV des Bruchs als Operand (Übersetzung des Ausdrucks „ein Sechstel von“ in „der sechste Teil“ und der Aufteilung 2400 in 6 Teile). Offenbar konnten bei zahlreichen Schülern diese GVen nicht in ausreichendem Maße aktiviert werden.

Fehleranalysen zeigen, wo die Hauptschwierigkeiten dieser Aufgabe zu finden sind: Über ein Drittel der falschen Bearbeitungen ist auf die Wahl einer nicht angemessenen Rechenoperation zurückzuführen. Die Zahlen 1/6 und 2400 wurden nicht multipliziert, sondern dividiert (27%) oder subtrahiert (8%). Rund 23% wählten Ausweichstrategien über die Prozentrechnung, die entweder durch die erhöhte Komplexität der Rechnungen oder falsche Prozentsätze (1/6 als 6% oder 1/6%) falsch gelöst wurden.

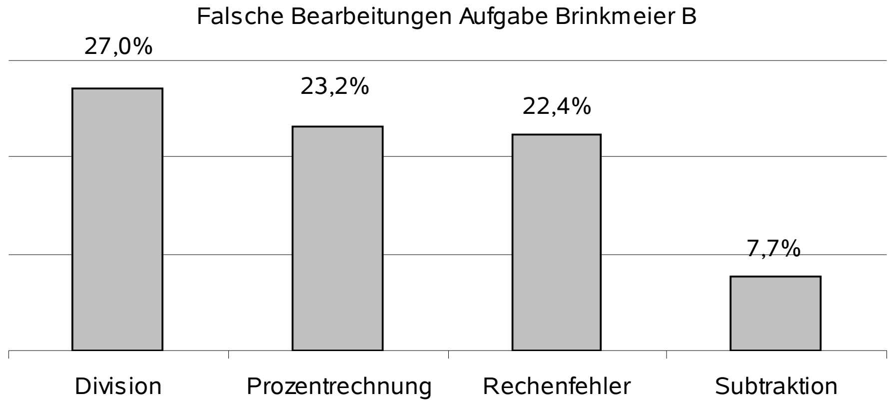


Abb. 3: Hauptfehler bei der Aufgabe Herr Brinkmeier B

Die Interviewstudien zeigen die Ursachen dieser Fehler genauer auf:

(1) Die Übertragung alter Vorstellungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen („Multiplizieren vergrößert“) verhindert die Wahl der angemessenen Rechenoperation.

(2) Nicht adäquat aufgebaute Vorstellungen werden durch eine zunehmende Orientierung an Regeln und Verfahren (hier: Dreisatz der Prozentrechnung) kompensiert.

In der Bruchrechnung ist die Rolle von GVen im Lösungsprozess zentral: Tragfähig aufgebaute GVen ermöglichen eine erfolgreiche Bearbeitung von Aufgaben in Modellierungskontexten, andererseits wirkt sich die unreflektierte Übertragung von Vorstellungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen Fehler verursachend aus. Zahlreiche weitere Aufgabenanalysen und Interviewfallstudien belegen dies (Wartha, 2007).

## Literatur

[1] Hofe, R. vom (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

[2] Hofe, R. vom, Kleine, M., Wartha, S., Blum, W. & Pekrun, R. (2005). On the role of Grundvorstellungen for the development of mathematical literacy. First results of the longitudinal study PALMA. *Mediterranean Journal of Mathematics Education*, *4(2),* 67-84.

[3] Kleine, M. (2004). *Quantitative Erfassung von mathematischen Leistungsverläufen in der Sekundarstufe I.* Hildesheim: Franzbecker.

[4] Padberg, F. (2002). *Didaktik der Bruchrechnung.* Heidelberg: Spektrum

[5] Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs.* Unveröff. Dissertation, Uni Regensburg.