Martin HENNECKE, Hildesheim[1]

Fehlerdiagnostische Auswertung empirischer Studien in der Bruchrechnung

1. Einführung

Spätestens mit den PISA-Studien sind auch in Deutschland groß angelegte Schulleistungsstudien in den Blickpunkt des öffentlichen Interesses geraten. Im Mittelpunkt dieser Untersuchungen steht die Messung mathematischer Kompetenz. Derartige Kennzahlen entfalten ihre Bedeutung vor allem im Vergleich verschiedener Probandengruppen. Alternativ zur Lösungsquote kann auch der Arbeitsweg in den Mittelpunkt der Betrachtung gestellt werden. Auch wenn mit der Fehleranalyse dieser Ansatz seit mindestens 80 Jahren zum mathematikdidaktischen Forschungsrepertoire gehört, existieren bis heute nur wenige groß angelegte Studien dieser Art.

Aus praktischen Gründen wählt man für größere Studien relativ geschlossene Aufgabenformen. Besonders einfach in der Erfassung sind Auswahlfragen, die jedoch für die Analyse von Rechenwegen denkbar ungeeignet sind. Dazu ein Beispiel: Versieht man die Aufgabe „Berechne $2\frac{1}{3}\ 2\frac{1}{4} =$“ mit den Optionen $4\frac{2}{12}$, $\frac{63}{12}$, $\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{12}$ und $5\frac{1}{4}$, sind zwei wichtige Lösungen und drei wichtige Fehler abgedeckt. Stellt man diese Aufgabe jedoch als offene Aufgabe, antwortet nicht einmal die Hälfte der Schülerinnen und Schüler des sechsten Schuljahrgangs mit einer dieser Optionen (Daten der ERaB-Studie). Offene Aufgaben hingegen bedürfen einer Kodierung, die umso aufwändiger und bzgl. der Kodierungsobjektivität anfälliger wird, desto komplexer man das Kodierungssystem gestaltet. Im Interesse der Handhabbarkeit, gestaltet man daher das Kodierungssystem überschaubar, z. B. 01: Richtig, 02: Richtig und vereinfacht, 10: Fehler mit der gemischten Schreibweise, 11: Fehler bei der Multiplikation von Brüchen, etc.

Die ERaB-Studie [1-3] folgt der Leitfrage, wie sich die Bedeutung korrekter und fehlerhafter Rechenstrategien in der Bruchrechnung im Laufe der Schulzeit verändert. Diese Leitfrage erfordert ein derart feines Kodierungssystem, dass es für eine manuelle Kodierung nicht mehr sinnvoll handhabbar erschien. Daher wurde ein zweistufiges Kodierungssystem gewählt, in dem zuerst nur die Notationen der Probanden kodiert und danach eine computerbasierte inhaltliche Kodierung (inklusive Fehleranalyse) erfolgt. Mangels geeigneter Standardprogramme für ein derartiges Vorgehen wurde bzw. wird vom Autor mit BugPiria ein spezialisiertes Werkzeug entwickelt.

2. Kodierung der Notationen

Ziel des ersten, manuellen Schritts der Kodierung ist die elektronische Erfassung der Schülernotationen um diese der zweiten, computerbasierten Kodierungsstufe zugänglich zu machen. Idealweise sollten die Notationen dazu nur mit einem Formeleditor „abgetippt“ werden, so dass die erfassten Notationen die tatsächlichen Schülernotationen eins zu eins repräsentieren. Abweichend von dieser Grundidee wurden einige seltene, syntaktisch vom Eingabewerkzeug nicht vorgesehene, Notationen (z. B. $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{2+3}{8\;8}=\frac{5}{8}$) oder schlecht lesbare Ausdrücke interpretierend erfasst. Zudem wurden Überschreibungen von Notationen in Einzelschritte zerlegt:

$$\text{Schülernotation: } \frac{8}{9}:\frac{2}{3}=\frac{{}^{4}\cancel{8}}{{}_{3}\cancel{9}}\,\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}}=\frac{4}{3} \qquad \text{Erfasst: } \frac{8}{9}:\frac{2}{3}=\frac{8}{9}\,\frac{3}{2}=\frac{4}{3}\,\frac{1}{1}=\frac{4}{3}$$

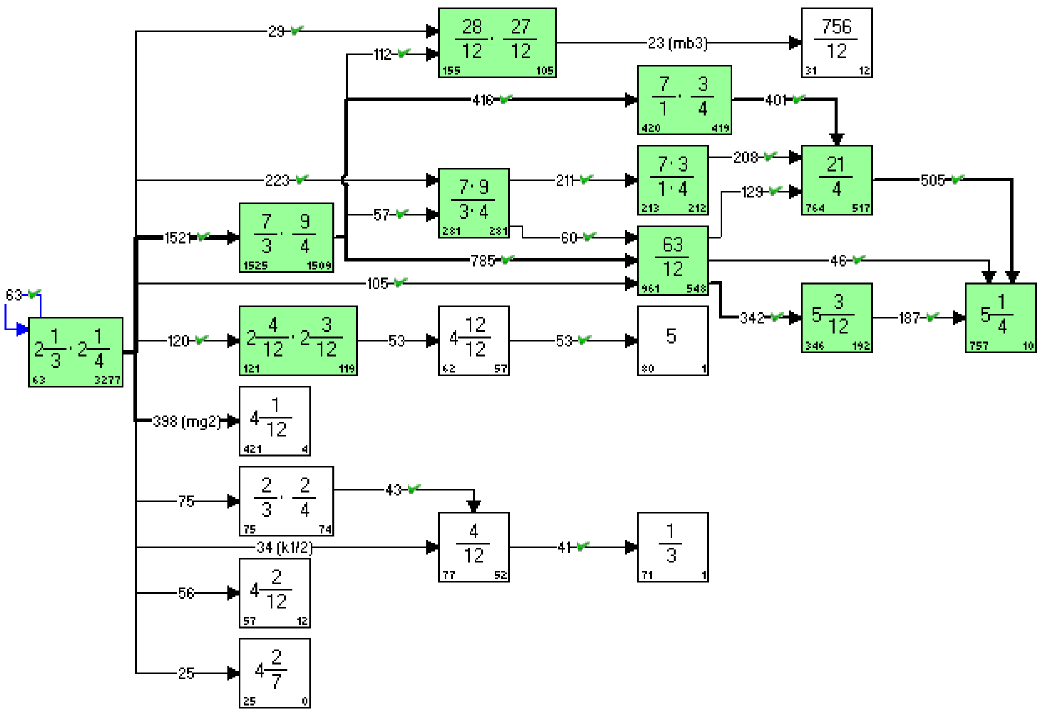
Im Rahmen der ERaB-Studie wurden auf diese Weise 321.187 Rechenschritte erfasst – dies klingt aufwändiger als es bei entsprechender Softwareunterstützung ist.

3. Kodierung der Inhalte

Die eigentliche inhaltliche Kodierung erfolgt im nächsten Schritt vollständig computerbasiert. Der technisch anspruchsvollste Teil hierbei ist die automatische Fehleranalyse. Hierzu wurde auf BugFix [4] zurückgegriffen. BugFix analysiert die erfassten Rechenschritte auf der Grundlage von zurzeit rund 350 korrekten und fehlerhaften Regeln. Zudem existieren in BugPiria für weitere Merkmale (wie z. B. ob ein Rechenschritt richtig, ein Ergebnis vollständig vereinfacht oder wie lang ein Rechenweg ist) eine Reihe entsprechender, flexibel konfigurierbarer „Generatoren“. Die computergestützte Kodierung hat den entscheidenden Vorteil, dass eine sehr detaillierte inhaltliche Kodierung möglich ist. Selbst die sonst langwierige Nachkodierung von nicht geplanten Merkmalen ist ohne großen Aufwand lösbar.

4. Alternative Aufbereitung

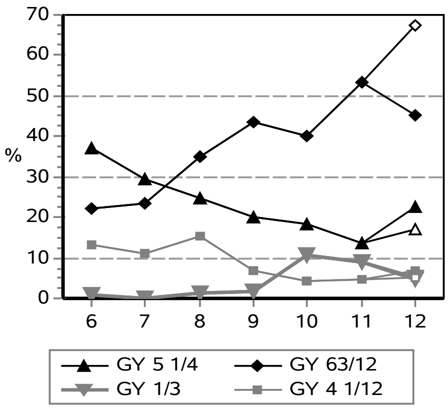
Ein weiterer Vorteil der Erfassung der Notationen ist, dass auf dieser Datengrundlage zusammenfassende Darstellungsformen erzeugt werden können, die die wesentlichen Rechenwege einer Probandengruppe veranschaulichen. BugPiria ermöglicht zu diesem Zweck die Erzeugung so genannter Rechengraphen. Ein Rechengraph ist ein gerichteter Graph, dessen Knoten durch die Aufgabe und die Notationen der Schülerinnen und Schüler gegeben sind. Zwei Knoten werden durch eine Kante verbunden, wenn für mindestens eine Schülerin oder einen Schüler ein Rechensschritt vom Ausgangsknoten zum Zielknoten erfasst wurde. Die Kantenbeschriftung gibt die Anzahl derartiger Arbeitsschritte wieder.

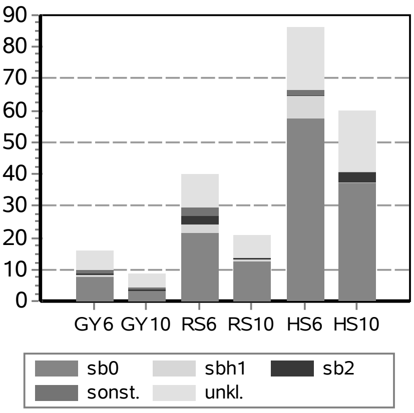


Die Abbildung zeigt einen zum Abdruck sehr stark vereinfachten Rechengraphen zur Aufgabe $2\frac{1}{3}\ 2\frac{1}{4}$ für die Teilnehmenden der ERaB-Studie (n = 4107). Die zwei kleinen, an die Knoten des Graphen annotierten Zahlen, geben die Summe der ein- bzw. ausgehenden Kantenbeschriftungen an. Ausgehend von der Aufgabe $2\frac{1}{3}\ 2\frac{1}{4}$ trat dementsprechend bei 1521 Rechenwegen $\frac{7}{3}\ \frac{9}{4}$ als nächste Notation auf. 16 Probanden beendeten ihren Rechenweg mit dieser Notation (Differenz der kleinen Zahlen).

5. Auswertung

Rechengraphen sind zudem ein komfortables Werkzeug für die Auswertung der Daten. So erlauben auf prozentuale Beschriftung umgestellte Rechengraphen den Vergleich von Probandengruppen. Für eine Pseudo-Längsschnittstudie wie die ERaB-Studie sind z. B. Diagramme, die die Veränderung von Rechenwegen über die Schuljahrgänge darstellen von besonderer Bedeutung. So zeigt z. B. das linke Diagramm auf der Folgeseite für die Aufgabe $2\frac{1}{3}\ 2\frac{1}{4}$ den Anteil der Antwortenden aus dem Gymnasium verschiedener Schuljahrgänge, deren Rechenweg bestimmte Notationen enthielt. Die nicht ausgefüllten Punkte im zwölften Schuljahrgang repräsentieren Leistungskurse. Die Liniendarstellung dient lediglich der Lesbarkeit. Sie soll keine entsprechende Entwicklung zwischen den Erfassungspunkten suggerieren. Deutlich sichtbar ist z. B. das Aufkommen eines bis dahin wenig bedeutsamen Fehlers im zehnten Schuljahrgang (vgl. [3]).





Das rechte Diagramm zeigt als Beispiel ein zusammengefasstes Ergebnis der automatischen Fehleranalyse mit BugFix für die Aufgabe $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}$ als Anteil der Antwortenden nach Schulformen und Schuljahrgängen. Die Fehlerkürzel von BugFix stehen dabei für folgenden Fehler:

sb0	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$	$\frac{a-c}{b-d}$	sbh1	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$	$\frac{a-c}{\mathrm{kgV}(b,d)}$	sb2	$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}$	$\frac{a+c}{b}$
sonst.	sonstige erkannte Fehler					unkl.	unklassifizierte Fehler	

6. Zusammenfassung

Die zweistufige Kodierung verspricht einen geringen Informationsverlust in der Kodierungsphase bei durchaus überschaubarem Aufwand. Neben klassischen Auswertungen mit statistischen Kennzahlen entstehen z. B. mit Rechengraphen alternative Formen der Aggregation, die einen visuellen Zugang ermöglichen und die Thesenbildung erleichtern. Voraussetzung des Ansatzes ist jedoch, dass die Aufgabenformen der computergestützten Kodierung der Inhalte zugänglich sind.

[1] Der Autor bedankt sich bei Kathrin Winter für die gemeinschaftliche Durchführung der ERaB-Studie, der die gezeigten Beispiele entstammen.

Literatur und elektronische Quellen

[1] Hennecke, M.; Winter, K.: Entwicklung von Rechenanwendungen in der Bruchrechnung, URL: www.erab.de. Universität Hildesheim

[2] Hennecke, M.: Schema F vs. Flexibilität: Zur Handhabung der Bruchrechnung im Laufe der Schulzeit. In: Tagungsband des Nürnberger Kolloquiums zur Didaktik der Mathematik 2007. Nürnberg 2007

[3] Winter, K.: Rechenfertigkeiten in der Bruchrechnung: Unterschiede in Schulformen und Klassenstufen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, 2007

[4] Hennecke, M.: Online Diagnose in intelligenten mathematischen Lehr-Lern-Systemen. VDI-Verlag, Düsseldorf 1999