Kirsten HECKMANN, Friedhelm PADBERG, Bielefeld

Zur Entwicklung des Dezimalbruchverständnisses bei Schülerinnen und Schülern der Klasse 6

Da beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen im Grunde nur das dezimale Stellenwertprinzip fortgesetzt werden muss, gilt die Dezimalbruchrechnung allgemein als leicht verständlicher Unterrichtsinhalt. Eine aktuelle Längsschnittuntersuchung an rund 160 Schülern zeigt jedoch, dass gerade die Nähe zu den natürlichen Zahlen häufig zu fehlerhaften Übertragungen führt und somit eine zentrale Ursache für weit verbreitete Fehlvorstellungen darstellt. Ein zentrales Problem liegt im Stellenwertverständnis, das eine wichtige Grundlage für die gesamte Dezimalbruchrechnung darstellt.

1. Untersuchungsdesign

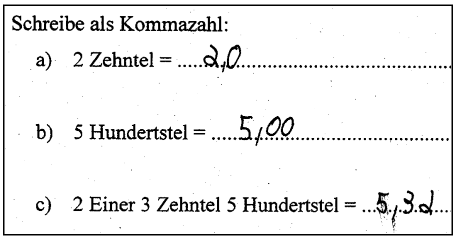
Bei der vorliegenden Untersuchung handelt es sich um eine Längsschnittstudie, an der sechs Realschulklassen mit rund 160 Schülern teilnahmen. Diese Schüler wurden am Anfang, in der Mitte und gegen Ende des Schuljahres getestet, so dass die ersten beiden Testzeitpunkte vor der „normalen" Bruchrechnung (T1) bzw. vor der Dezimalbruchrechnung (T2) liegen und die Vorkenntnisse zu Dezimalbrüchen erheben. Dagegen misst der letzte Testzeitpunkt (T3) gegen Ende der Dezimalbruchrechnung den Unterrichtserfolg.

Für die Untersuchung wurde eine Kombination aus quantitativer und qualitativer Forschungsmethodik gewählt, um ohne Reduzierung des Stichprobenumfangs auch qualitative Aussagen treffen zu können. Die Grundlage bildet ein schriftlicher Test, der zu den einzelnen Testzeitpunkten von allen Schülern bearbeitet wurde. Dieser Test wurde den Schülern in zwei verschiedenen Versionen (A, B) vorgelegt, die neben wenigen Unterschieden einen großen Pool gemeinsamer Aufgaben beinhalten und im Wesentlichen in der Reihenfolge der Aufgaben differieren. Im Mittelpunkt des Tests stehen Aufgaben zum Stellenwertverständnis, zum Größenvergleich, zur Dichte, zur lokalen und globalen Sichtweise von Dezimalbrüchen sowie zu anschaulichen Vorstellungen und zum Umgang mit Veranschaulichungen. Im Hinblick auf die beiden ersten Testzeitpunkte wurden viele Aufgaben in den Kontext von Größen bzw. in einfache Sachkontexte eingebettet, damit ihre Bearbeitung auch ohne spezielle Kenntnisse aus dem Bereich der Dezimalbruchrechnung möglich ist. Ferner wurden – trotz Variation der Schwierigkeitsmerkmale – bewusst einfache Zahlen gewählt, um ein Durchschlagen typischer Fehler aus dem Bereich der natürlichen Zahlen (z. B. Rechenfehler) weit möglichst zu vermeiden.

Den qualitativen Part der Studie bilden halbstandardisierte Einzelinterviews (i. d. R. drei pro Klasse und Testzeitpunkt), die jeweils im Anschluss an den schriftlichen Test geführt wurden, und in denen die Schüler zu ihren Vorgehensweisen bei den schriftlichen Aufgaben befragt wurden. Um Aussagen über individuelle Entwicklungen machen zu können, wurden nach Möglichkeit zu allen Testzeitpunkten die gleichen Schüler interviewt, wobei die Erstauswahl bewusst nach mehreren Zielsetzungen erfolgte. So ging es bei der Analyse fehlerhafter Lösungen einerseits um die Abklärung typischer, bereits bekannter Fehlerstrategien, andererseits um die Aufklärung unklarer Lösungen im Hinblick auf „neue“ Fehlerstrategien und nicht zuletzt um die Klärung der Ursachen für ein inkonsistentes Lösungsverhalten. Daneben sollten jedoch auch richtige Lösungen auf die zu Grunde liegenden Strategien hin analysiert und bevorzugte Vorgehensweisen herausgearbeitet werden.
Insgesamt liegen der Untersuchung 486 Testbögen und 47 Einzelinterviews zu Grunde.

2. Untersuchungsergebnisse im Bereich der Stellenwerte

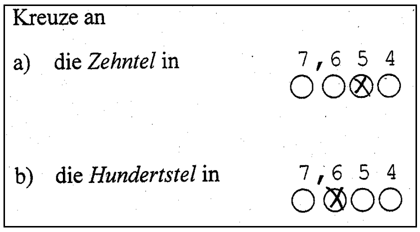
Bei den Aufgaben zum Stellenwertverständnis fallen fehlerhafte Übertragungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen besonders deutlich auf. Die Interviews liefern wichtige Anhaltspunkte dafür, dass viele Schüler von einer Analogie zwischen Zehnern und Zehnteln, Hundertern und Hundertsteln etc. ausgehen und Eigenschaften der bekannten Stellenwerte fehlerhaft übertragen. So überträgt z. B. Sebastian (zu T3) einerseits die Anzahl der „Nullen“ und andererseits die Größenbeziehungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen auf den Bereich der Dezimalbrüche, wobei er zur Unterscheidung jeweils die erste Stelle durch ein Komma abtrennt:


Schreibe als Kommazahl:
a) 2 Zehntel = 2,0
b) 5 Hundertstel = 5,00
c) 2 Einer 3 Zehntel 5 Hundertstel = 5,32

a) „Ja, äh, weil **Zehntel** ist ja immer **eine Null**“
b) „Ja, und hier ist dann ja **hundert**, da sind dann **zwei Nullen**. Und da hab ich dann auch wieder die Fünf davor gemacht.“
c) „Ja, fünf **Hundertstel ist dann ja das meiste** … da hab ich das dahin geschrieben, noch die Fünf nach vorne. Drei **Zehntel ist ja dann auch noch mehr**; das hab ich dann dahin gesetzt. Und **Einer ist ja dann so das wenigste**; das hab ich dann an die hinterste Stelle gesetzt.“

Die gleiche Problematik ist auch bei Alicia zu erkennen, die – ebenfalls zum letzten Testzeitpunkt (!) – die Nachkommastellen des Dezimalbruchs 7,654 offenbar zu der natürlichen Zahl 654 zusammenfasst und in dieser Zahl die Zehner als Zehntel und die Hunderter als Hundertstel ankreuzt. In ihren Ausführungen setzt sie dabei Zehner und Zehntel sowie Hunderter und Hundertstel gleich:

A: Also da, da dachte ich das wären da die Einer (zeigt auf die letzte Stelle von 7,654), und dann … dann also die **Zehner, Zehner, also Zehntel** (zeigt auf die vorletzte Stelle), hab ich die Fünf angekreuzt.



I: Mhm. Und die erste Stelle wäre dann was? Die, wo die sechs steht?

A: **Hundert, Hundertstel.**

Die quantitative Auswertung dieser Testaufgabe lässt darauf schließen, dass Sebastian und Alicia keine Einzelfälle sind, sondern dass ihre Deutung der Stellenwerte weit verbreitet ist:

Bearbeitung	angekreuzt		T1	T2	T3
	a)	b)			
richtige Lösung	6	5	7,2 %	7,2 %	52,2 %
654 als natürliche Zahl	5	6	17,4 %	44,9 %	33,3 %
Aufgabe nicht bearbeitet			39,1 %	23,2 %	7,2 %
andere Fehllösungen			36,1 %	24,7 %	7,2 %

Tab. 1: Identifizierung der Zehntel und Hundertstel in 7,654 (N = 69)

Obwohl man sich bewusst sein sollte, dass die Begriffe Zehntel und Hundertstel im Alltagsleben der Schüler keine Rolle spielen, verdeutlichen die extrem geringen Lösungsquoten von nur 7,2 % vor der Dezimalbruchrechnung dennoch, dass der Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen kein Selbstläufer ist. Ganz im Gegenteil werden Zehntel und Hundertstel nur in Ausnahmefällen *inhaltlich* als zehnte und hundertste Teile eines Ganzen gedeutet. Stattdessen scheinen sich erheblich mehr Schüler *formal* an sprachlichen Aspekten zu orientieren und diese Stellenwerte als Analoga zu Zehnern und Hundertern zu interpretieren. Betont sei in diesem Zusammenhang, dass sich der Rückgang an Auslassungen vom ersten zum zweiten Testzeitpunkt ausschließlich in falschen Strategien – insbesondere der gerade genannten – niederschlägt. Der entsprechende Schüleranteil von 33,3 % gegen Ende der Dezimalbruchrechnung (T3) verdeutlicht, dass trotz des Unterrichts viele Schüler an dieser fehlerhaften Vorstellung festhalten. Eine Lösungsquote von gut 50 % ist in Anbetracht des Zeitpunktes sowie der einfachen Aufgabenstellung erschreckend gering.

3. Konsequenzen für die Unterrichtspraxis und für das Curriculum

Den Ergebnissen zu Folge scheinen Stellenwerte – im fehlenden Bewusstsein dieser Problematik – im Unterricht bislang häufig vernachlässigt worden zu sein. Dies hat fatale Folgen, weil ein fundiertes Stellenwertverständnis eine zentrale Grundlage für einen verständnisbasierten (nicht bloß formalen) Umgang mit Dezimalbrüchen ist. Das übergeordnete Ziel muss dabei in der Vermittlung einer *inhaltlichen* Vorstellung bestehen, bei der z. B. Zehntel als zehnte Teile eines Ganzen erkannt werden. Hierzu muss die Fortsetzung des Prinzips der wiederholten Division durch 10 herausgestellt werden. Im Hinblick auf die vielen fehlerhaften Übertragungen empfiehlt sich außerdem eine Kontrastierung der Stellenwerte vor und nach dem Komma. So können die Schüler inhaltlich leicht entdecken, dass beispielsweise Hunderter größer als Zehner sind, Hundertstel dagegen kleiner als Zehntel oder dass es zwar Einer, aber keine „Eintel" gibt. Ein fundiertes Stellenwertverständnis zeichnet sich ferner durch ein adäquates Verständnis für den Zusammenhang zwischen den Stellenwerten aus, welches durch Übungen zum Bündeln oder Fragestellungen wie „Um wie viel sind 5 Hunderter größer als 5 Hundertstel?" gefördert werden kann. Regelableitungen für Operationen mit Dezimalbrüchen sollten sorgfältig auf diesen anschaulichen Grundlagen erfolgen, die gut auch mit geeigneten Arbeitsmitteln angebahnt werden können. Hier empfehlen sich die so genannten Linearen Arithmetik-Blöcke, die bislang im Wesentlichen in Australien eingesetzt werden und eine Optimierung der in den USA gebräuchlichen Zehnerblöcke darstellen (vgl. [1], S. 580 ff.). Auf curricularer Ebene halten wir eine zeitliche Ausdehnung der Dezimalbruchrechnung auf mehrere Schuljahre für sinnvoll, damit diese wichtigen anschaulichen Vorarbeiten nicht aufgrund von Zeitdruck vernachlässigt werden. Ebenso sprechen wir uns für eine Parallelbehandlung von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen aus, einerseits zur Vermeidung einer ungleichen Gewichtung im Unterricht (die Dezimalbruchrechnung wird von der normalen Bruchrechnung oft an das Ende des sechsten Schuljahres gedrängt) und andererseits aus inhaltlichen Gründen zur Verdeutlichung der Zusammenhänge sowie der Vor- und Nachteile der beiden Zahldarstellungen.

Literatur

[1] Heckmann, Kirsten: Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde. Dissertation. Berlin: Logos Verlag 2006

[2] Padberg, Friedhelm: Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche – Dezimalbrüche. 3. Auflage. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag 2002