Torsten FRITZLAR, Lüneburg

Mathematisches Forschen und Theoriebilden - Konzeptionelle Grundlage für die Förderung mathematischer Begabungen

Christoph (11;3) und Yannick (8;2) sind zwei Fünftklässler, die am Lüneburger Förderprojekt für mathematisch interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler teilnehmen. Vor einigen Wochen arbeiteten sie gemeinsam an der folgenden Problemstellung, mit der sie sich insgesamt etwa 120 Minuten (verteilt auf zwei Treffen) intensiv auseinander setzten.

Wie viele verschiedene Vierecksformen gibt es auf einem 3×3–Geobrett? Wie viele kleine Quadrate passen jeweils in die Vierecke?

Mit einem Gummiring lassen sich viele verschiedene Vielecke auf einem Geobrett spannen.
Wie hängen die Größe des Vielecks und die Anzahl der verwendeten Stifte zusammen?

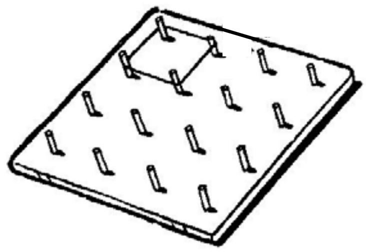


Abbildung 1: Schülerarbeitsblatt (Auszug)[1]

Im Folgenden sollen einige wichtige Stationen der Forschungsarbeit der beiden Jungen angedeutet werden:

Nachdem alle Vierecksformen auf dem kleinen Geobrett gefunden wurden, will Y verschiedene Vierecke auf dem größeren Brett suchen. C sucht nach *n*-Ecken auf dem kleinen Brett.

⇨

C (5:35): „Bisher kriege ich hier nur das 7-Eck rein. …“
Y: „Ich versuche ein 9-Eck.“
C: „Ein 9-Eck passt da locker. Das sind 25 Stifte? Probiere mal, ob du da ein 23-Eck rein kriegst!“
Y: „Ein 23-Eck? Wozu das denn?“
C: „Ja! Oder einfach so viele Ecken wie gehen. Ich möchte nämlich mal gucken, ob es da vielleicht immer 2 weniger oder so gibt.“

⇦

Die Schüler stellen fest, dass das „Brett“ 36 „Stifte“ hat.
C (12:50): „Ein 8-Eck bekommt man hier auf dem 3×3 nicht hin, 7 geht maximal. Dementsprechend würde ich auch sagen, man muss mindestens 2 verschenken, also da, würde ich sagen, gehen maximal 34. Aber die Frage ist, vergrößert es sich da oder bleibt es, dass man immer 2 verschenken muss?“

⇨

C (20:24): „Das vorhin kann ja sowieso nicht stimmen, denn bei einem 2×2-Feld, da gehen alle 4 und da verschenkt man ja überhaupt nichts zum Beispiel. Also müsste es eigentlich theoretisch möglich sein, dass man immer alle schafft.“

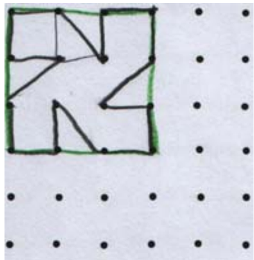
---

[1] Zusätzlich wurden den Schülern quadratische Punktmuster der Größen 3×3 und 6×6 zur Verfügung gestellt.

Schließlich kann Y doch ein 36-Eck zeichnen.
C (27:47): „Die Frage ist natürlich, … hier sind es 9, also eine ungerade Anzahl, und hier 36, eine gerade Anzahl. Da müssen wir probieren, ob 16 vielleicht geht, weil das ja auch eine gerade Anzahl ist.“

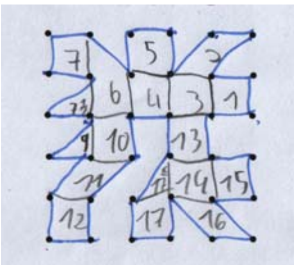
⇨

C (29:14): „Ja, bei geraden geht’s immer. …Die Frage ist natürlich: … Bleiben bei den ungeraden immer 2 übrig?“



⇦

C und Y untersuchen nun, wie groß die *n*-Ecke sind; das 36-Eck ist beispielsweise 17 Einheitsquadrate groß.



⇨

Insgesamt erhalten die Schüler:

4 = 7Q, 2 = 1Q, 6 = 17Q

Schließlich erkennt C den folgenden Zusammenhang zwischen der Gesamtzahl der Stifte auf dem Brett und dem Flächeninhalt des „maximalen“ Polygons:

$$\frac{n-2}{2} = n\,Q$$

⇦

Beim nächsten Treffen gehen C und Y der Frage nach, welche Zusammenhänge es bei kleineren *n*-Ecken gibt.
C (40:50): „Das ist die Frage. Man muss überlegen, ob es einen schönen Zusammenhang gibt. …Eine Formel wie beim letzten Mal.“

⇨

An verschiedenen 3-, 4-, 5- und 6-Ecken stellen die Schüler fest, dass der Flächeninhalt jeweils um ein halbes Quadrat zunimmt. Größere *n* passen allerdings nicht ins Muster.
C (46:07): „Bis zum Sechseck sieht’s ja ganz gut aus, aber dann verlassen uns die Geister.“

⇦

Y greift auf das 36-Eck mit 17 Q zurück.
C (54:32): „Ich würde sagen, das weist wieder auf unsere Formel *n*-2 durch 2 gleich *n* Q hin. …Aber mit unserem Achteck, das bereitet mir noch ein bisschen Sorgen.“

⇨

Die Schüler bemerken, dass *n* dabei die Anzahl der Stifte sein muss. Erst nach weiteren 14 Minuten findet C den entscheidenden Ansatz:
C: „Aber vielleicht hat das damit zu tun, dass da keiner in der Mitte ist.“

Nach vielen weiteren Beispielen wird ein Zwischenresümee gezogen:
Y (72:55): „Also meine Idee müsste stimmen: Es ist nur, wo keiner in der Mitte ist, die Regelmäßigkeit.“
C: „Ja, könnte sein. Die Frage ist nur, wie verändern die Punkte in der Mitte die Regelmäßigkeit.“

⇩

[2] Auf einem $n \times n$-Brett sind für gerade n Polygone mit n^2 Ecken möglich, für ungerade $n > 5$ auch.

C (73:53): „Entwirf mal ein Siebeneck oder Sechseck mit 2 in der Mitte. Also Hauptsache, es sind 2 in der Mitte.“

⇨

C (78:50): „Ja! Es verändert sich jeweils um die Anzahl der Punkte in der Mitte … Glaube ich jedenfalls.“
A: „Oh nein, du glaubst es nur? Weißt du es nicht?“[3]
C: „Ich habe es bei 1, 2 und 3 ausprobiert, bei 4, das könnt ihr ja machen.“

⇦

C: „Es trifft weiterhin die Regel *n* minus 2 durch 2 gleich *n* Q zu, allerdings mit Veränderungen nach oben:
Die Summe erhöht sich jeweils um 1, wenn ein Punkt in der Mitte ist, um 2, wenn zwei Punkte in der Mitte sind, um 3, wenn 3 Punkte, also Stifte in der Mitte sind und so weiter.“

Verallgemeinernde Überlegungen und Schlussfolgerungen für die Förderung

Vorstehende Ausführungen können den intensiven Arbeitsprozess von Christoph und Yannick nur andeuten. Ich hoffe, dass dennoch mathematikspezifische Kompetenzen (in Weinerts weiterem Sinne) deutlich werden, die sich hier vor allem in der enormen Ausdauer der Schüler zeigen, in ihrer Gerichtetheit auf Muster und Strukturen, im flüssigen Wechselspiel zwischen Formen und Zahlen, im flexiblen Umgang mit eigenen Vermutungen und deren kritischer Überprüfung. Die Freude und Erregung der beiden Jungen beim Entdecken allgemeingültiger Ergebnisse – immerhin finden und formulieren die Fünftklässler den Satz von Pick – kann ein Text leider nicht wiedergeben.

Darüber hinaus wird paradigmatisch die enorme Bedeutung des Beobachtens, Vermutens und plausiblen Schließens für das produktive mathematische Tätigsein deutlich, die u. a. auch in den Arbeiten von Pólya und Lakatos eindrucksvoll nachgewiesen wurde. Neben diesen, den Naturwissenschaften nahe kommenden Aspekten, sind Logik und Deduktion charakterisierende Elemente der Mathematik. Diese beiden „Seiten“ der Mathematik stehen sich allerdings nicht gegensätzlich gegenüber (vgl. auch Ponte, 2001), vielmehr ergänzen und verbinden sie sich in *Theoriebildungsprozessen*, die ich als charakteristisch für das Tätigsein des (forschenden) Mathematikers ansehe. Die folgende Abbildung zeigt ein vorläufiges, sehr grobes Verlaufsmodell eines solchen Prozesses, der oft mit der Erkundung einer mathematisch reichhaltigen Situation beginnt, aus der zunächst eine Anfangsfragestellung gewonnen wird, sofern diese nicht vorgegeben ist.

---

[3] Der Fünftklässler A hat während des zweiten Treffens das Arbeiten von Christoph und Yannick weitgehend beobachtend verfolgt.

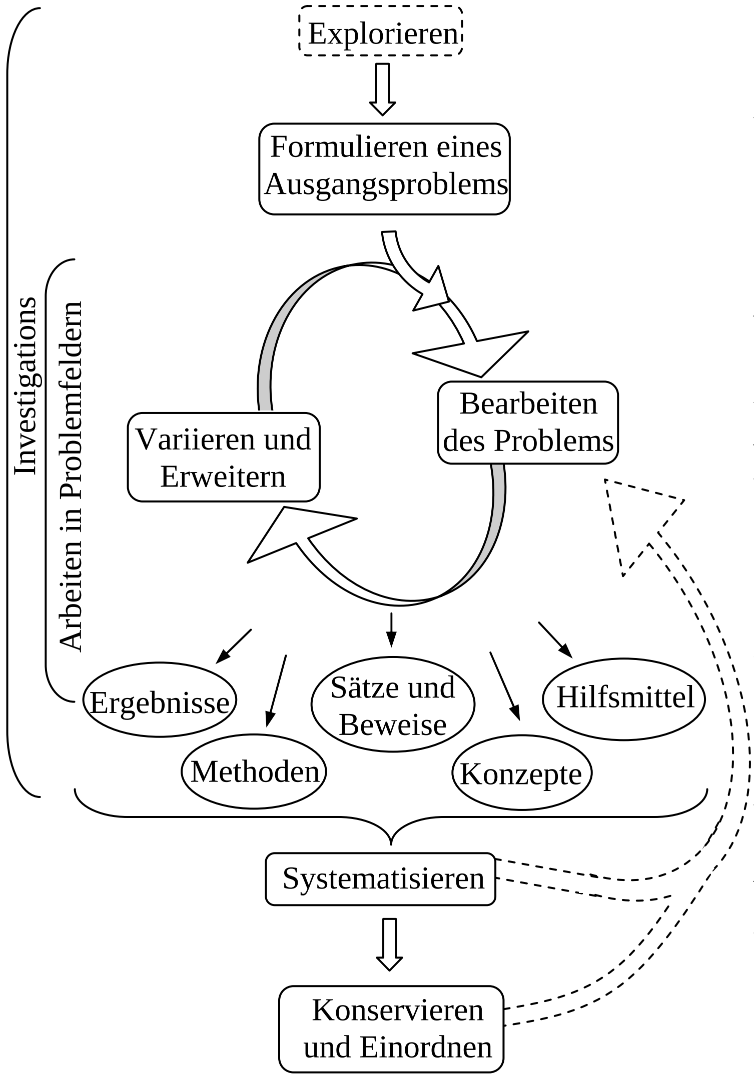


Abbildung 2: Theoriebildungsprozess

Durch deren Bearbeitung, durch Variationen und Ausweitungen können sich dann weitere Arbeitsanlässe ergeben. Aus einem solchen produktiven Kreislauf erwächst ein „Theoriegewebe", das schließlich zu systematisieren und zu optimieren ist, das konserviert und in bereits vorhandene Wissensbestände eingeordnet werden muss.

Diese Vorstellungen zum produktiven mathematischen Tätigsein können Grundlage sein für die Konzeption einer langfristigen und kontinuierlichen Förderung mathematisch begabter Schüler(innen) über Klassen- und Schulstufen hinweg. Selbstverständlich sind für sehr junge oder noch unerfahrene Schüler vollständige Theoriebildungsprozesse nicht möglich. Wesentliche Kernelemente lassen sich jedoch, wie in der Abbildung angedeutet, durch die Arbeit mit Problemfeldern realisieren. Davon ausgehend kann die Entwicklung über im ersten Teil beispielhaft skizzierte Forschungsprozesse – den „investigations" der angelsächsischen Tradition – bis hin zu Theoriebildungsprozessen in der Elementarmathematik erfolgen (vgl. auch Fritzlar, in press), für die allerdings bislang fast ausschließlich Erfahrungen aus der Oberstufe vorliegen.

Literatur

Fritzlar, T. (in press). Wie können mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler im mittleren Schulalter gefördert werden? Erscheint im Tagungsband zum Bildungskongress im September 2006 an der Universität Münster

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht: Kluwer.