Hans FISCHER, Eichstätt

Über Sinn und Unsinn von Näherungskonstruktionen

Wie ordnen sich Näherungskonstruktionen in den Gesamtbereich der Lehre von den „geometrischen Konstruktionen“ ein?
Aufgrund welcher Motivationen beschäftigte man sich mit Näherungskonstruktionen zu verschiedenen Zeiten?
Welchen didaktischen „Mehrwert“ bietet heute die Behandlung von Näherungskonstruktionen im Mathematikunterricht?

Verschiedene Konstruktionsarten und Konstruktionsanlässe

Näherungskonstruktionen sind Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, durch die entweder unlösbare Konstruktionsaufgaben (Würfelverdopplung, Winkeldreiteilung, Kreisquadratur) oder nur sehr kompliziert anzufertigende Konstruktionen (17-Eck) näherungsweise ausgeführt werden können. In der griechischen Antike unterscheidet man zwischen Konstruktionen mit Zirkel und unmarkiertem (!) Lineal, die offenbar einem, vor allem durch Platon propagierten Methodenideal entsprechen, und „mechanischen“ Verfahren, die sich außer Zirkel und Lineal noch weiterer Instrumente bedienen. Näherungskonstruktionen sind aus der Antike offenbar nicht überliefert. Es besteht die Vermutung, daß erst durch die Praxis der Vermessung oder der Architektur, also im Rahmen der „Geometria practica“, diese Art des Konstruierens betrieben worden ist. Praktische Aspekte der Mathematik sind aber erst aus römisch beherrschter Epoche überliefert, insbesondere durch Herons „Metrika“ (ca. 50 n.C.), in der sich zahlreiche rationale Näherungswerte — etwa für die Seitenlängen regelmäßiger Vielecke — finden. Ein wesentlicher Impuls zur weiteren Förderung der praktischen Geometrie ergibt sich ab dem 11. Jahrhundert in den Bauhütten großer Kathedralen. Auch Albrecht Dürer (1471–1528) in seiner *Vnderweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt* (1525) steht in dieser Tradition der Bauhütten. Dürer ist einer der ersten Autoren der Neuzeit, die klar zwischen exakten Konstruktionen und Näherungskonstruktionen trennen.
Ab dem 17. Jahrhundert zeigt sich eine zunehmend systematische Behandlung von Näherungskonstruktionen, die nicht mehr so sehr auf geometrischer

Intuition, sondern eher auf algebraisch gewonnenen Näherungen beruht, zu deren „Veranschaulichung“ die Näherungskonstruktionen zunehmend herangezogen werden. Die von Vieta begründete und von Descartes weitergetriebene Algebraisierung geometrischer Konstruktionen führt schließlich im 19. Jahrhundert zu den Unmöglichkeitsbeweisen für die klassischen Konstruktionsprobleme (Gauß 1801, Lindemann 1882).
Im 19. und frühen 20. Jahrhundert mündet die systematische Behandlung der Näherungskonstruktionen, die auch verstärkt Bezüge zu einer beginnenden Approximationstheorie für Funktionen (Gauß, Chebyshev) herstellt, in eine regelrechte „Rekordjagd“. Der Problemkreis „Näherungskonstruktionen“ fügt sich so in die zahlreichen mit geometrischen Konstruktionen verbundenen Aktivitäten des 19. Jahrhunderts ein, wie sie in einer solchen Vielfalt und einem solchen Aspektreichtum nie mehr erreicht werden.
Bis in die 1930er-Jahre hinein finden sich in mathematischen Journalen noch Beiträge zu Näherungskonstruktionen, seit dem 2. Weltkrieg scheint aber dieser Problemkreis nur noch Historiker und – am Rande – Mathematikdidaktiker ein bißchen interessiert zu haben.
Neben der Praxisrelevanz und der innermathematischen Bedeutung gibt es freilich noch einen weiteren (eher unbeabsichtigten bis „unsinnigen“) Anlaß, sich mit Näherungskonstruktionen zu beschäftigen: Bei zwangsweise fehlschlagenden Versuchen zur Lösung der klassischen Konstruktionsprobleme können vielleicht immerhin brauchbare Näherungskonstruktionen herauskommen. Offensichtlich ist das Auftreten solcher Näherungskonstruktionen in der Neuzeit schwerpunktmäßig mit der Spezies des mathematischen Amateurs verbunden, wie sie sich, allerdings in durchaus verschiedenen, mit der jeweiligen Bildungs- und Wissenschaftssituation verbundenen Ausprägungen ab dem 16. Jahrhundert entwickelte.

Ein unterrichtliches Beispiel: die Modifikation der Dürerschen Winkeldreiteilung

Der didaktische Wert von Näherungskonstruktionen liegt besonders darin, daß mit ihnen ein breites Spektrum von mathematischen Fähigkeiten und Leitideen abzudecken ist, und die Teilbereiche Geometrie, Algebra sowie Analysis eng miteinander verbunden werden können. Als Beispiel für ein jahrgangsübergreifendes Problem soll die Winkeldreiteilung nach Dürer dienen. Dürer teilt in einem ersten Schritt eine zum Winkelbogen gehörige Sehne in drei gleiche Teile und errichtet die Lote in den Teilpunkten, ein Vorgehen, das im folgenden als 'Projektionsmethode" bezeichnet wird. Die Schnittpunkte der Lote mit dem Winkelbogen liefern eine erste Näherung für die Winkeldreiteilung (Abb. 1), die man als eine von zwei Möglichkeiten zur Fortsetzung des Verfahrens der Winkelhalbierung betrachten kann. Mit Hilfe eines DGS kann nun die Projektionsmethode auf ihre Genauigkeit und auf ihren Einsatzbereich hin untersucht werden. Die rein experimentelle Phase verläßt man etwa dann, wenn man nach einer Begründung dafür sucht, daß der innere Teilwinkel stets kleiner als die beiden äußeren Teilwinkel sind, mit etwas Trigonometrie kann man auch die Abweichung zwischen innerem (bzw. äußerem) Teilwinkel und dem tatsächlichen Winkeldrittel untersuchen. Die Suche nach Verbesserungen der Projektionsmethode führt zum Beispiel auf die Möglichkeit, in einem zweiten Schritt das arithmetische Mittel der zu den drei Teilwinkeln gehörigen Sehnen zu bilden und als Sehne des approximativen Drittelwinkels zu betrachten, wobei sich hervorragende Resultate ergeben. Dürer selbst hat übrigens eine andere, nicht so effektive Methode zur Verbesserung seiner Lotkonstruktion gewählt. Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung der Projektionsmethode wäre, den Überschuß eines der beiden Außenwinkel gegenüber dem Innenwinkel approximativ zu dritteln und dieses „Drittel" von einem der Außenwinkel abzuziehen (Abb. 2).

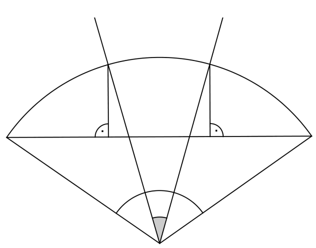

Abb. 1: Projektionsmethode

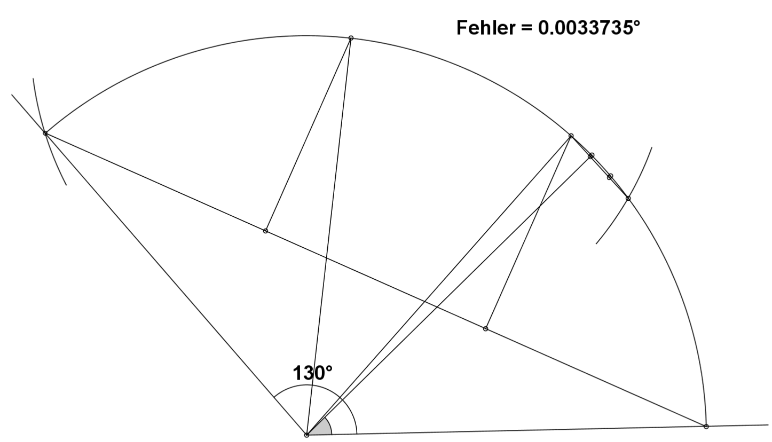

Abb. 2: Verbesserte Projektionsmethode

Drittelt man den Überschuß wieder gemäß der Projektionsmethode, so erhält man ein anschauliches Beispiel für eine fehlerkorrigierende Iteration. Mit Computeralgebra erhält man relativ leicht für den Winkel x im Bogenmaß:

$$\frac{x}{3} \approx -\arcsin\left(\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\arcsin(\frac{1}{3}\sin\frac{x}{2}) - \frac{x}{4}\right)\right) + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{3}\sin\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4}$$
$$= \frac{x}{3} - \frac{x^9}{25509168} + \mathrm{O}(x^{11}).$$

Fazit

Näherungskonstruktionen stellen einen besonders aspektreichen Problemkreis zwischen Geometrie, Algebra und Analysis dar, wobei die Anwendung von Computeralgebra und dynamischen Geometriesystemen einer Beschäftigung mit diesem Thema aus heutiger Sicht neue Impulse geben kann. Daneben kommt im Zusammenhang mit Näherungskonstruktionen der wesentliche Aspekt der Förderung mathematischer Allgemeinbildung hinzu: Es handelt sich ja um zentrale Probleme, die die Entwicklung der Mathematik ab der griechischen Antike über Jahrtausende geprägt haben. Bei einem Schüler, der während seiner Schulzeit mit Näherungskonstruktionen in Berührung gekommen ist, wird wohl die Wahrscheinlichkeit zumindest reduziert, daß er in späteren Jahren zum Trisektierer oder Zirkelquadrierer wird.

Literatur

[1] Fischer, H.: Näherungskonstruktionen. In: 23. Eichstätter Kolloquium zur Didaktik der Mathematik, Katholische Universität Eichstätt, Mathematik, Preprint-Reihe 2007–1, S. 92-1 – 92-12.
`http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/didmath/naeherung/naeherungskonstruktionen.pdf`

[2] Vahlen, Th.: Konstruktionen und Approximationen. Leipzig, Teubner, 1911.