Ján GUNČAGA, Štefan TKAČIK, Ružomberok

Grundbegriffe der Analysis nach Professor Igor Kluvánek

Professor Igor Kluvánek gehörte zu den bekanntesten slowakischen Mathematikern. Er wurde im Jahre 1931 in Košice geboren. Er studierte Vakuumtechnologie an der Elektrotechnischen Fakultät der Slowakischen Technischen Universität in Bratislava. In den Jahren 1952 – 1964 arbeitete er an dieser Universität am Lehrstuhl für Mathematik. In den Jahren 1964 – 1967 war er an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität von Pavol Jozef Šafárik in Košice tätig.

Nach 1950 hat Igor Kluvánek zusammen mit Ladislav Mišík und Marko Švec die Lehrbücher Mathematik I, II geschrieben. Sie wurden sehr bekannt und an der Hochschulen in der Tschechoslowakei bzw. in Tschechien und in der Slowakei mehr als 40 Jahren benutzt.

Zu Beginn des Jahres 1967 musste Kluvánek wegen des kommunistischen Regimes in der ehemaligen Tschechoslowakei nach Australien emigrieren. Während seines 23 jähriges Wirken an der Flinders University in Adelaide entstand sein Gesamtwerk, das vor allem für die Lehramtstudenten bestimmt war. Nach dem Ende des Kommunismus kehrte Kluvánek in die Slowakei zurück, wo er 1993 verstarb.

1. Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle

Dieses Thema wird entsprechend den Lehrplänen der slowakischen Gymnasien im letzten Studienjahrgang unterrichtet. Im Lehramtstudium der zukünftigen Lehrer gehört dieses Thema zum ersten Semester des Analysisunterrichtes. An der Pädagogischen Fakultät der Katholischen Universität in Ružomberok benutzen wir die Konzeption nach Professor Igor Kluvánek [5].

In dieser Konzeption ist die Stetigkeit der Funktion an einer Stelle mit den Begriffen Supremum und Infimum verbunden. Wir betrachten zuerst die einseitige Stetigkeit einer monotonen Funktion an der Stelle. Die Funktionen, die in der Umgebung einer Stelle monoton sind, werden sehr oft in der Schulmathematik am Gymnasium benutzt. Andere Konzeptionen kann man sehen bei [2], [3], [4], [8].

Definition 1. Sei die Funktion f monoton fallend in einer linken Umgebung W der Stelle a. Wir heißen diese Funktion f linksseitig stetig an der Stelle a, wenn $f(a)$ das Infimum der Menge $\{f(x)\colon x\in W, x < a\}$ ist.

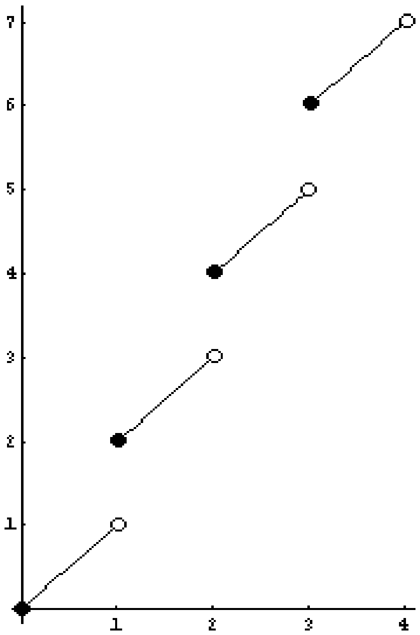
Definition 2. Sei die Funktion f monoton wachsend in einer linken Umgebung W der Stelle a. Wir heißen diese Funktion f linksseitig stetig an der Stelle a, wenn $f(a)$ das Supremum der Menge $\{f(x): x \in W, x < a\}$ ist.

Definition 3. Sei die Funktion f monoton fallend in einer rechten Umgebung W der Stelle a. Wir heißen diese Funktion f rechtseitig stetig an der Stelle a, wenn $f(a)$ das Supremum der Menge $\{f(x): x \in W, x > a\}$ ist.

Definition 4. Sei die Funktion f monoton wachsend in einer rechten Umgebung W der Stelle a. Wir heißen diese Funktion f rechtsseitig stetig an der Stelle a, wenn $f(a)$ das Infimum der Menge $\{f(x): x \in W, x > a\}$ ist.

Die Benutzung dieser Definitionen zeigen wir an einem Beispiel:

Beispiel 1. Sei $f(x) = x + [x]$ für jedes $x \in (-\infty, \infty)$ und $[x]$ ist der ganzzahlige Anteil der Zahl x. Wir untersuchen die Stetigkeit an der Stelle $a = 3$.



Lösung: Die Funktion f ist monoton wachsend im ganzen Definitionsbereich $(-\infty, \infty)$. Das Intervall $W = (-\infty, 3\rangle$ ist eine linke Umgebung der Stelle 3, in welcher die Funktion f monoton wachsend ist. Die Zahl 5 ist das Supremum der Menge $S = \{f(x): x \in W, x < 3\}$, weil $f(x) = x + [x] \leq x + 2 < 5$, für jedes $x < 3$. $f(3) = 6 \neq 5$, also ist die Funktion f nicht linksseitig stetig an der Stelle 3.

Das Intervall $W' = \langle 3, 4)$ ist eine rechte Umgebung der Stelle 3, in welcher die Funktion f monoton wachsend ist. Die Menge $S' = \{ f(x): x \in W', 3 < x\} = \{x + [x]: x \in \langle 3, 4), 3 < x\} = \{x + [x]: x \in (3, 4)\} = \{x + 3: x \in (3, 4)\} = (6, 7)$.

Das Infimum der Menge S' ist $6 = f(3)$ und die Funktion f ist rechtseitig - stetig an der Stelle 3.

Bei dieser Konzeption der Stetigkeit gibt es zwei Probleme:

1. Verstehen der Begriffe „Supremum“ und „Infimum“,
2. Funktionen, die nicht monoton fallend oder wachsend in jeder rechten oder linken Umgebung sind.

Das erste Problem ist ganz gut lösbar, wenn der Lehrer die Begriffe Supremum und Infimum an guten Beispielen (vor allem Intervalle) erarbeitet. Das zweite Problem ist mit dieser Definition lösbar:

Definition 5. Die Funktion *f* heißen wir rechtseitig - (linksseitig -) stetig an der Stelle *a*, wenn Funktionen *h*, *g* existieren, welche in einer rechten (linken) Umgebung W der Stelle *a* folgende Bedingungen erfüllen:

1. sie sind monoton wachsend oder fallend,
2. für jedes $x \in$ W gilt : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$,
3. $g(a) = f(a) = h(a)$,
4. sie sind rechtseitig - (linksseitig -) stetig an der Stelle *a.*

Definition 6. Die Funktion *f* heißen wir stetig an der Stelle *a*, wenn die Funktion *f* gleichzeitig rechtseitig - und linksseitig - stetig an der Stelle *a* ist.

2. Grenzwert der Funktion an der Stelle

Der Grenzwert der Funktion *f* an der Stelle *a* ist ähnlich wie bei Königsberger [6] und Pickert [7] mit dem Begriff der stetigen Fortsetzung der Funktion *f* an der Stelle *a* verbunden. Man sieht es in dieser Definition:

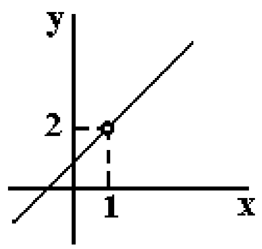
Definition 7. Sei die Funktion *f* definiert in einer Umgebung *W* der Stelle *a.* Die Funktion *f* hat an der Stelle *a* den (rechtseitigen, linkseitigen) Grenzwert *L,* wenn die Funktion *F*:

1. $F(x) = f(x)$ für jedes $x \in$ W und $x \neq a$,
2. $F(x) = f(x)$ für $x = a.$

(rechtseitig -, linksseitig -) stetig an der Stelle *a* ist. Man schreibt: $\left(\lim_{x\to a^+} f(x) = L, \lim_{x\to a^-} f(x) = L\right)$ $\lim_{x\to a} f(x) = L.$

Die Benutzung dieser Definition zeigen wir an einem Beispiel:

Beispiel 2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ an der Stelle 1 einen Grenzwert hat.



Lösung: Die Funktion *F*(*x*) ist für $x \neq a$: $F(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1} = x+1$. Wenn wir wollen, dass die Funktion *F*(*x*) stetig an der Stelle 1 wird, definieren wir $F(1) = 2$.

Deshalb hat die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ an der Stelle 1 den Grenzwert 2 und wir können schreiben: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

3. Schlussbemerkungen

Vorteile der Konzeption nach Professor Igor Kluvánek liegen darin, dass die Studenten die Grundbegriffe der Analysis tiefer verstehen und mehr mit graphischen Darstellungen der Funktionen arbeiten können. Dadurch verstehen Sie auch besser die Unterschiede zwischen Funktionen, die

- einen Grenzwert an der Stelle haben und an dieser Stelle auch stetig sind,
- einen Grenzwert an der Stelle haben und an dieser Stelle nicht stetig sind,
- keinen Grenzwert an der Stelle haben (siehe [1]).

Bemerkung: Dieser Beitrag wurde unterstützt vom Grant KEGA 3/3269/05.

Literatur

[1] Gunčaga J.: *Grenzwertprozesse in der Schulmathematik.* In: *Journal für Mathematik-Didaktik.* Stuttgart – Leipzig – Wiesbaden, 2006, Heft 1, s. 77 – 78

[2] Gunčaga J., Tkačik Š.: *Derivative of a function at a point*. In: *XIIth Czech – Polish – Slovak Mathematical School*, Ústí nad Labem, UJEP, 2005, s. 120 – 124

[3] Eisenmann P.*: Propedeutika infinitezimálního počtu (Propädeutik des Infinitesimalrechnens).* UJEP, Ústí nad Labem 2002

[4] Fulier J.: *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy (Funktionen und Funktionsdenken im Analysisunterricht).* UKF, Nitra 2001

[5] Kluvánek I.: *Handschriften zur Differential- und Integralrechnung*

[6] Königsberger B.: *Analysis I.* Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 2001

[7] Pickert G.: *Aufbau der Analysis vom Stetigkeitsbegriff her*. In: *Der Mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 1968, 21. Band, Heft 11, s. 384 – 388

[8] Wachnicki E., Powązka Z.: *Problemy analizy matematycznej w zadaniach. Część I (Die Probleme des Analysisunterrichts in den Aufgaben. Teil I).* AP, Kraków 2002