Siegmund PROBST, Hannover*

Leibniz an der Schwelle zur Infinitesimalmathematik

Obwohl sich Leibniz während seines Aufenthalts in Mainz (1667-1672) in seinen Studien zur Bewegungslehre mit der Indivisibilientheorie Cavalieris auseinandergesetzt hat,[1] waren bisher keine infinitesimalmathematischen Schriften von ihm aus diesem Zeitraum bekannt: Diese Lücke kann nun wenigstens zum Teil geschlossen werden, denn bei der Edition der mathematischen Schriften von Leibniz hat sich herausgestellt, dass eine unter den Manuskripten der Pariser Zeit (1672-1676) verzeichnete Handschrift bereits in Mainz entstanden ist.[2]

1. Datierung des Manuskripts

Die Untersuchung der Handschrift durch W. S. Contro ergab, dass der Text auf dem gleichen Papier geschrieben ist, das Leibniz ursprünglich für die Arbeit an einem juristischen Projekt in Mainz verwendete.[3] Auch inhaltliche Gründe sprechen für die Datierung auf die Mainzer Zeit: Leibniz befasst sich am Anfang der Aufzeichnung mit einem geometrischen Instrument, das er in Briefen vom Herbst 1671 zu seinen Erfindungen zählt.[4] Am Schluss stehen Bemerkungen zu Linsenschleifgeräten. Dieses Thema wird seit dem Spätherbst 1670 in Leibniz' Korrespondenz wiederholt angesprochen (s. u.). Leibniz erwähnt eine kritische Äußerung von Th. Hobbes zur Brauchbarkeit hyperbolischer Linsen. Er bezieht sich dabei auf eine Bemerkung aus Hobbes' Schrift *De homine*, die 1658 erstmals erschienen und 1668 im Rahmen einer Werkausgabe neu gedruckt worden war [4]. Vor einigen Jahren hat U. Goldenbaum ein Exemplar dieser Werkausgabe untersucht, das aus dem Besitz von Leibniz' Mainzer Gönner J. Chr. v. Boineburg stammt, und darin Marginalien sowohl von Boineburg wie von Leibniz identifiziert. Der entsprechende Absatz in *De homine* weist Unterstreichungen auf, die mit ziemlicher Sicherheit von Leibniz stammen.[5]

* Der Verfasser dankt Ursula Goldenbaum (Atlanta), Walter S. Contro (Hannover) und Eberhard Knobloch (Berlin) für die freundliche Erlaubnis, von Ihnen noch nicht publizierte Forschungsergebnisse verwenden zu dürfen.

1 vgl. [1], S. 5-7 sowie [2], Reihe VI, Band 2, S. 258-276.

2 [3], Nr. 817. – Der Text wird in [2], Reihe VII, Band 4, bearbeitet von W. S. Contro und E. Knobloch, publiziert werden.

3 vgl. [2], Reihe VI, Band 2, S. XXI-XXII.

4 [2], Reihe II, Band 1, 2. Auflage (2006), S. 262 u. 286.

5 UB Erfurt: Sign. Pu 1430; [4], *De homine*, S. 51; [5], Band 2, S. 78; eine Publikation der Marginalien durch U. Goldenbaum ist in Vorbereitung.

Den Einwand von Hobbes erwähnt Leibniz auch im Brief an M. Fogel vom 24.I.1671; Fr. Nitzsch wiederum nimmt im Brief vom 29.III.1671 Stellung zu der ihm von Leibniz – in einem nicht aufgefundenen Brief – mitgeteilten Bemerkung von Hobbes.[6] Daher kann mit ziemlicher Sicherheit davon ausgegangen werden, dass die Aufzeichnung von Leibniz in der Zeit seines Aufenthaltes in Mainz niedergeschrieben wurde, wahrscheinlich im Winter 1670/71.

2. Konstruktion und Versuch der Quadratur der Hyperbel

Zu Beginn des kurzen Textes zeigt sich Leibniz zuversichtlich, dass mit der Indivisibilienmethode alle Probleme hinsichtlich Kurven auf einfache Weise angegangen werden können. Er beginnt mit dem Beispiel einer Hyperbel und beschreibt die Konstruktion eines (endlichen) geraden Kegels. Dies geschieht rein verbal, eine Zeichnung enthält das Manuskript nicht. Leibniz lässt ein rechtwinkliges Dreieck um eine der Katheten rotieren, die damit die Höhe des Kegels darstellt. Diese kann in beliebig viele (gleiche) Abschnitte geteilt werden, welche die Stelle der Indivisibeln bzw. Punkte der Höhe vertreten. Der Kegel wird dann aus so vielen Kreisen – parallel zum Basiskreis – gebildet, wie es Punkte in der Höhe gibt. Leibniz betrachtet einen beliebigen Punkt des Kegelmantels (zwischen dem Basiskreis und der Spitze des Kegels). Von diesem aus fällt er das Lot auf den Basiskreis. Diese Senkrechte wird dann die Höhe der Hyperbel bilden. Der Fußpunkt des Lotes und der Mittelpunkt des Basiskreises bestimmen einen Durchmesser des Basiskreises, senkrecht dazu wird eine Sehne durch den Fußpunkt gelegt. Diese bildet die Basis des Hyperbelsegmentes. Parallel zu ihr können in allen Kreisen des Kegels Sehnen durch das Lot gezogen werden. Die Endpunkte dieser Sehnen bilden zusammen die Hyperbel, wenn man unendlich viele Teilpunkte der Höhe gewählt hat. Leibniz fügt an, dass man bei einer endlichen Unterteilung die Hyperbel "mechanice" erzeugt, also nicht geometrisch, sondern "per rectam fractam", durch einen Polygonzug.[7] Er folgert, dass sich die "minima" des Hyperbelbogens zu den "minima" ihrer Höhe verhalten, wie die Verbindungsstrecken der Endpunkte zweier Sehnen zu den Abschnitten der Höhe zwischen ihnen. Aber weil dieses Verhältnis variiert und nach seiner Ansicht weder arithmetisch noch geometrisch allgemein bestimmt werden kann, schließt er daraus, dass die Quadratur der Hyperbel nicht exakt möglich ist. Er fügt an, dass er die Problematik im Fall der Parabel gesondert untersuchen will.

---

[6] [2], Reihe II, Band 1, 2. Auflage (2006), S. 127, 148.

[7] Eine Parallelstelle in *De homine* ist im Erfurter Exemplar unterstrichen: "Hyperbola non fit nisi per puncta, id est, Mechanicè" [4], *De homine*, S. 32; [5], Band 2, S. 46.

3. Probleme der Interpretation

Man muss nicht eigens betonen, dass die Überlegung von Leibniz, nicht ausreicht, um eine Quadratur durchzuführen oder ihre Unmöglichkeit zu beweisen. Aus dem Wortlaut des Textes lässt sich nicht einmal mit ausreichender Sicherheit rekonstruieren, welche Methode Leibniz verwenden wollte. Auch wenn die Zerlegung des Kegels in parallele Kreisflächen zunächst an die Methode Cavalieris erinnert, weist die Proportion, die er zwischen den Bogenelementen der Hyperbel und den Minima der Höhe aufstellt, eher auf eine Überlegung hin, die mittels Aufsummierens von Trapezen infinitesimaler Höhe operiert. Die Frage nach möglichen Quellen für diesen Ansatz lässt mehrere Möglichkeiten offen. Leibniz könnte ihn in Anlehnung an die einbeschriebenen Polygone der traditionellen Exhaustionsmethode entwickelt haben. Einschlägige Schriften dazu hatte Leibniz aber zu diesem Zeitpunkt noch nicht genauer studiert, die wenigen Ausnahmen, die er eingesehen hatte, dürften seine damaligen Kenntnisse überstiegen haben.[8] Eine mögliche Quelle könnte Hobbes' Kritik an den infinitesimalen Methoden von J. Wallis sein: Hobbes hält seinem Kontrahenten vor, dass z.B. Dreiecke nicht aus Parallelogrammen, sondern aus Trapezen bestehen.[9]

Wie aber ist der letzte Satz des mathematischen Abschnittes zu verstehen? War Leibniz die Quadratur der Parabel durch Archimedes unbekannt, oder ging es ihm um eine Lösung des Problems mit der neuen Methode? Leibniz hatte die Schriften von Archimedes vermutlich noch nicht studiert, vielleicht kannte er das Resultat aus Cavalieris *Geometria indivisibilibus continuorum*, obwohl er sich später nur an eine flüchtige Lektüre erinnerte.[10] Es gibt mindestens noch eine weitere mögliche Quelle: Thomas Hobbes erwähnt Archimedes' Quadratur der Parabel in seiner Schrift *De Corpore*.[11] Leibniz hat auch dieses Buch gelesen, sowohl in der Erstausgabe von 1655 wie in der Ausgabe von 1668.[12]

Das Interesse an den Bogenelementen könnte zunächst auch so gedeutet werden, dass Leibniz durch ihre Aufsummierung vielleicht das ungelöste Problem der Rektifikation der Hyperbel angehen wollte. Die Lösung der Rektifikation der Parabel war ein relativ neues Ergebnis der mathemati-

---

[8] vgl. [1], S. 5.

[9] "Neque enim trianguli constant ex parallelogrammis, sed ex Trapeziis." [4], *Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae*, S. 110; [5], Band 4, S. 174.

[10] vgl. [1], S. 5 Anm. 26.

[11] [5], Band 1, S. 254.

[12] [4], *De corpore*, S. 155. Es gibt Marginalien von Leibniz auf S. 147, 150, 160, zusätzlich einen Hinweis auf die Figurentafel zwischen S. 158/159.

schen Forschung und Leibniz damals vielleicht noch unbekannt. Möglicherweise hatte Leibniz den gescheiterten Versuch von Thomas Hobbes in Kapitel 18 von *De corpore* gelesen. Gegen eine Interpretation, dass Leibniz hier an eine Rektifikation der Hyperbel gedacht hat, steht aber der Wortlaut des Textes: Leibniz verwendet zweimal ausdrücklich “quadrari”.

Die Indivisibilien werden von Leibniz nur mittelbar in die Untersuchung eingeführt, indem er eine beliebige Unterteilung wählt und sowohl den endlichen wie den unendlichen Fall in Betracht zieht: Im endlichen Fall wird nicht die Hyperbel selbst erzeugt, sondern ein Polygonzug. Methodisch haben wir es also mit einer Verschränkung von Indivisiblen- bzw. Infinitesimalenbetrachtung auf der einen Seite und Grenzbetrachtung wie in der traditionellen Exhaustionsmethode auf der anderen Seite zu tun. Dass Leibniz allein aus der Variabilität des Verhältnisses zwischen Bogenelement und Höhenelement schließt, dass dieses Verhältnis nicht auf eine allgemeine Weise bestimmt werden könne und deshalb die Rektifikation unmöglich sei, zeigt seinen geringen Kenntnisstand der Problematik zur Zeit der Abfassung des Textes. Auffällig ist weiterhin die Diskrepanz zwischen dem optimistischen Beginn der Aufzeichnung und dem Konstatieren der Unmöglichkeit einer Lösung nach nur wenigen Zeilen. Auch das Fehlen jeglichen Versuches, dieses Verhältnis durch eine Zahlenfolge oder gar eine Gleichung wenigstens ansatzweise darzustellen, weist auf eine sehr frühe Entstehungszeit hin. Leibniz selbst hat den Text später durch die Aufschrift "nugae pueriles" als jugendliche Torheit deklariert.

Literatur

[1] Joseph E. Hofmann: Leibniz in Paris 1672-1676. His Growth to Mathematical Maturity. Cambridge University Press, Cambridge 1974

[2] Gottfried Wilhelm Leibniz: Sämtliche Schriften und Briefe. Hrsg. von der Preußischen (zuletzt: Berlin-Brandenburgischen und Göttinger) Akademie der Wissenschaften. Otto Reichl, Darmstadt (zuletzt: Akademie Verlag, Berlin) 1923ff

[3] Catalogue critique des manuscrits de Leibniz. Fascicule II (Mars 1672 – Novembre 1676). Hrsg. A. Rivaud u.a. Société Française d'Imprimerie et de Librairie, Poitiers 1914-1924

[4] Thomas Hobbes: Opera philosophica quae latine scripsit omnia. Blaeu, Amsterdam 1668

[5] Thomas Hobbes: Opera philosophica quae latine scripsit omnia. Hrsg. W. Molesworth. 5 Bände. Bohn, London 1839-1845