Claudia BÖTTINGER, Essen

Ein Kategoriensystem beim Wechseln von Repräsentationsebenen

1. Arbeits- und Anschauungsmittel

Beim Wechsel von Repräsentationsebenen geht es darum, einen mathematischen Sachverhalt auf verschiedene Weisen darzustellen. Traditionell wird zwischen enaktiven, ikonischen und symbolischen Darstellungen unterschieden. Mithilfe von Arbeits- und Anschauungsmaterialien werden die verschiedenen Darstellungsarten im Mathematikunterricht der Grundschule realisiert. Bekannt ist, dass Veranschaulichungen und bildliche Darstellungen nicht einfach zu methodischen Hilfsmittel reduziert werden dürfen, mit deren Hilfe arithmetische Inhalte leichter verständlich werden. Die innewohnenden Strukturen müssen vom Lernenden selbst in das Material hineininterpretiert werden (Jahnke 1984). Bildliche Darstellungen werden dadurch selbst zu Symbolen.

Geht man von der Vorstellung aus, dass Mathematik Muster und Relationen beschreibt, so ist sie auf Bezugsobjekte angewiesen (Steinbring 2005). Die Relationen sind dabei nicht immer beobachtbar, nicht empirisch fassbar. Da in verschiedenen Darstellungen unterschiedliche Beziehungen zum Ausdruck kommen, ist ein Wechsel zwischen Darstellungen wichtig, um eine größere Einsicht in ein mathematisches Problem zu bekommen. Unter dieser Perspektive ist klar, dass die Fähigkeit zum Wechseln von Repräsentationsebenen ein Merkmal mathematischer Begabung ist. (Käpnick 1998).

Diese Sichtweise auf Arbeits- und Anschauungsmittel hat zur Konsequenz, dass verschiedene Darstellungsarten gleichberechtigt sind, weil sie alle symbolischer Natur sind. Für das mathematische Verständnis ist der Wechsel in jede Richtung erforderlich und zwar flexibel. In verschiedenen Darstellungen sind unterschiedliche Beziehungen kodiert, durch den Wechsel kann ein mathematisches Problem tiefer und umfassender durchdrungen werden. Daher sind Arbeits- und Anschauungsmittel keinesfalls nur Hilfsmittel für leistungsschwache Kinder, sondern sie haben einen Wert für alle Kinder, auch aller Altersstufen, vgl. Böttinger (2007).

2. Punktmusterfolgen

Eine spezielle Art der Darstellung sind Punktmusterfolgen, wie z. B. Dreieckszahlen. Mit ihrer Hilfe lassen sich arithmetische Gesetzmäßigkeiten entdecken. Umgekehrt lassen sich mithilfe von Punktmustern arithmetische Regelmäßigkeiten begründen (Müller/Wittmann 1997). Weil derartige Folgen auf Verallgemeinerbarkeit abzielen, hat Steinweg (2001) untersucht, nach welchen Aspekten Kinder solche Punktmusterfolgen fortsetzen. Sie hat herausgearbeitet, dass figurale und kardinale Aspekte eine Rolle spielen. Nur wenn beide Aspekte angemessen zusammenspielen, ist es möglich, die Folgen wie erwartet fortzusetzen. Auf dieses Zusammenspiel weist auch Bauersfeld (2005) hin. Das Fortsetzen einer geometrischen Folge und das Herausfinden ihrer Konstruktionsregel stellt eine enge, anspruchsvolle Verbindung zwischen Geometrie und Arithmetik dar. Bauersfeld (2006) präzisiert, dass die Fortsetzung der geometrischen Struktur die Bauregel liefert und sich daraus zwingend die zugeordnete Zahlenfolge ergibt.

Einen weiteren Aspekt betont Schmidt (2006): Wenn das Erfassen von Mustern und Gesetzen zu den zentralen Kategorien mathematischer Denkleistung gehört, sollte es möglich sein etwa in zusätzlichen Förderstunden Kindern den Gebrauch von Variablen zu ermöglichen – ohne den Kalkül der Mittelstufe. Er spricht pointiert von „einer Algebra ohne Algebra“.

3. Die empirische Studie

Mithilfe von halbstandardisierten Interviews wird untersucht, wie Kinder die Übersetzung von Punktmusterfolgen in arithmetische Ausdrücke und umgekehrt vornehmen.

Dabei sind folgende Aspekte herauszuarbeiten:

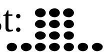
- Innerhalb der Darstellungsarten „Punktmuster“ und „Zahlen und Operationen“ hat man es mit unterschiedlichen Stufungen zu tun, die man auch konkret beobachten kann und die beschrieben werden sollen.
- Es ist davon auszugehen, dass der Übergang von einer Darstellung in eine andere sich als Wechselspiel, als Hin- und Herwechseln beschreiben lässt. Dieses Wechselspiel sollte beschrieben werden und typische Verläufe herausgearbeitet werden.
- Auch Grundschulkinder sind zu Verallgemeinerungen fähig. Zu untersuchen ist, in welcher Form und in welchem Umfang dies geschieht.

In einem ersten Interview besteht die Aufgabe der Kinder darin, Punktmusterfolgen fortzusetzen, passende Aufgaben zu ausgewählten Einzelmustern zu finden und die Anzahl von Punkten von gegebenen und nicht aufgemalten Mustern der Folge anzugeben. Das Auswertungsschema ist so gehalten, dass geometrische und arithmetische Sicht- bzw. Nutzungsweisen parallel gehalten sind. Außerdem bietet es enge Anbindungen an das Konzept der visuellen Strukturierungsfähigkeit (Söbbeke 2005).

4 verschiedene Kategorien sind bei der Auswertung zu berücksichtigen:

1. **Empirische Sicht auf die Muster**:
   a) Gliederung des Musters in Teilstrukturen: Auf geometrischer Seite ist festzuhalten, wie und in welche Teile ein einzelnes Muster gegliedert wird. Dem entspricht auf der arithmetischen Seite, welche (An-) Zahlen des Musters benutzt werden.
   b) Nutzung der Teilstrukturen: Die Punkte können eher isoliert gesehen werden, zu Teilstrukturen zusammengefasst werden oder etwa als spezielle Figur, etwa als Rechteck, gesehen werden. Dies hängt auf der arithmetischen Seite mit der Art der Anzahlbestimmung zusammen.
2. **Relationale Sicht auf das Muster**: Angabe von Beziehungen oder Gesetzmäßigkeiten. Diese können sich auf einen Teil des Musters beziehen, oder es kann das ganze Muster vollständig durch Beziehungen beschrieben werden. Hierbei ist zu unterscheiden, ob es sich um eine rein geometrische oder um eine rein arithmetische Gesetzmäßigkeit handelt. Wichtig sind auch Mischformen, bei denen sich etwa eine arithmetische Regel auf eine geometrische Beziehung stützt.
3. **Umstrukturierung des mathematischen Ausdrucks**. Auf der Punktmusterebene kann dies ein Umdeuten, ein (gedankliches) Umlegen von Punkten oder ein Verändern des Musters etwa durch (gedankliche) Hinzunahme von Punkten sein. Auf der arithmetischen Seite kann dies das Erfinden einer Aufgabe zu einer Zahl sein oder eine Anwendung von allgemein gültigen Rechengesetzen, wie dem Gesetz von der Konstanz der Summe. Die angegebene Aufgabe kann etwa im Sinne einer Hilfsaufgabe verändert werden. Hier gibt es ebenfalls aufeinander bezogene Nutzungen.
4. **Einzelnes Muster in Bezug zur Musterfolge**: Da Folgen von mathematischen Mustern betrachtet werden, muss festgehalten werden, ob ein Muster eher lokal, also ohne Bezug zu anderen Mustern, gesehen wird oder als Teil einer sich fortsetzenden Folge. Bei arithmetischer Nutzung ist auch eine Beziehung zur Folgennummer möglich – eine eher algebraische Sichtweise.

Beispiel:

Nico erklärt, warum die Aufgabe 12+4 gut zum folgenden Muster passt: 

Dann hab ich die hier (*Hält mit beiden Zeigefingern jeweils beiden äußeren Punkte der unteren Zeile im dritten Muster zu und deutet mit dem rechten Mittelfinger auf den nicht abgedeckten Teil),* Vier mal Drei hab ich gerechnet, das sind 12 und dann hab ich das noch plus Vier (*nimmt die Hände wieder hoch und deutet auf die beiden äußeren Punkte rechts und links in der unteren Zeile des dritten Musters)* (.) plus die Außenseiter. [unverständlich] Dann sind die das nicht mehr. Ja.

1a) Gliederung des Musters: geometrische Sicht: Vollständige Zerlegung in Struktureinheiten (Rechteck und die „Außenseiter") – arithmetische Sicht: Es wird die Anzahl des Rechtecks und der „Außenseiter" genutzt, passend dazu wird eine Additionsaufgabe angegeben
1b) Nutzung der Teilstrukturen: geometrische Sicht: Nico bezieht sich auf ein Rechteck – arithmetische Sicht: Angabe einer Multiplikationsaufgabe zum Rechteck
2. Gesetzmäßigkeiten: Nicht zu beobachten
3. Umstrukturieren eines math. Ausdrucks: Nicht zu beobachten
4. Einzelnes Muster in Bezug zur Musterfolge: Lokal, kein Bezug zur Musterfolge zu erkennen.

Literatur

[1] Heinrich Bauersfeld, Für kleine Mathe-Profis, Aulis Verlag Deubner, Köln, 2006

[2] Heinrich Bauersfeld, Die Bielefelder Förderansätze, in: Heinrich Bauersfeld, Karl Kießwetter (Hrsg.) Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? Mildenberger Verlag, Offenburg, 17-26, 2005

[3] Claudia Böttinger, Muster und Rechenaufgaben – Rechenaufgaben und Muster, Der Wechsel von Repräsentationsebenen und dessen Bedeutung für den Mathematikunterricht, Grundschulzeitschrift, Heft 201, 30-32

[4] Hans Niels Jahnke, Anschauung und Begründung in der Schulmathematik, Beiträge zum Mathematikunterricht, Bad Salzdetfurth, Franzbecker, 1984

[5] Friedhelm Käpnick, Mathematisch begabte Grundschulkinder, Greifswalder Studien zur Erziehungswissenschaft, Bd. 5, Peter Lang Europäischer Verlag der Wissenschaften, Frankfurt (Main), 1998

[6] Siegbert Schmidt Manuskript 2006

[7] Elke Söbbeke, Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern, Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2005

[8] Heinz Steinbring, The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction, Mathematics Education Library, Springer, Berlin, New York 2005

[9] Anna Susanne Steinweg, Zu Bedeutung und Möglichkeiten von Aufgaben zu figurierten Zahlen – Eine Analyse von Deutungen durch Grundschulkinder, JMD, 23, Heft 2, 129-151, 2001

[10] Erich Ch. Wittmann, Gerhard N. Müller, Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1, Stuttgart, Klett Schulbuchverlag 1997