Michael MEYER, Dortmund

„Ich weiß nicht. Logik oder so“ – Zur Logik des Entdeckens

„Ich weiß nicht. Logik oder so“ ist das Zitat eines Schülers einer 10. Klasse. Er beantwortet hiermit die Frage des Lehrers, wie er zu seiner Entdeckung gekommen sei. Wissen wir, welche logische Struktur ein Entdeckungsprozess besitzen muss?

Mittels der Schlussform Abduktion ist es möglich den Begriff „Entdeckung“ zu schärfen. In diesem Aufsatz wird die Abduktion zunächst im Kontrast zu den weiteren Schlussformen Deduktion und Induktion vorgestellt und konkretisiert. Anschließend wird die Abduktion als (Teil der) Forschungslogik bei der interpretativen Unterrichtsforschung thematisiert.

1. Deduktion, Induktion und Abduktion

Bei der Deduktion handelt es sich um einen denknotwendigen Schluss, der insbesondere in der veröffentlichten Mathematik eine wichtige Rolle einnimmt.

Mittels einer Deduktion schließen wir ausgehend von einem Fall auf ein Resultat. Legitimiert wird dieser Schluss durch ein allgemeines Gesetz.

Fall:	$\mathrm{F}(x_0)$
Gesetz:	$\forall i: \mathrm{F}(x_i) \Rightarrow \mathrm{R}(x_i)$
Resultat:	$\mathrm{R}(x_0)$

Deduktionen führen zu sicheren Ergebnissen, können jedoch keine neuen Erkenntnisse entstehen lassen: Das konkrete Resultat ist bereits in allgemeiner Form in der Folgerung des Gesetzes enthalten. Da das Gesetz bekannt ist, ist das Resultat (zumindest implizit) ebenfalls bekannt.

Bei der Induktion handelt es sich um den Schluss von einem konkreten Fall und einem konkreten Resultat auf ein allgemeines Gesetz.

Fall:	$\mathrm{F}(x_0)$
Resultat:	$\mathrm{R}(x_0)$
Gesetz:	$\forall i: \mathrm{F}(x_i) \Rightarrow \mathrm{R}(x_i)$

Als Schluss von konkreten Prämissen auf allgemeine Zusammenhänge kann eine Induktion nicht wahrheitsübertragend sein. Entgegen der verbreiteten Auffassung können mittels Induktionen auch keine neuen Gesetze generiert werden, weil die Induktion auf der Kenntnis des Zusammenhangs der beiden Prämissen beruht. Betrachten wir beispielhaft die Transitivität der Teilbarkeitsrelation. Dieses Gesetz könnte durch die Überprüfung eines weiteren Zahlenbeispiels bestätigt werden: Ausgehend von der Kenntnis, dass die Zahl 4 die Zahl 8 teilt und die Zahl 8 ein Teiler von 88 ist, wird mittels der vermuteten, aber noch nicht als wahr erkannten Teilbarkeitsrelation vorhergesagt, dass 4 dann auch ein Teiler von 88 sein müsste.

Die Vorhersage wird z.B. mit dem Taschenrechner geprüft. Tritt das vorhergesagte Resultat ein, ist das Gesetz induktiv bestätigt worden.

Fall:	$4 \mid 8 \wedge 8 \mid 88$
Resultat:	$4 \mid 88$
Gesetz:	$\forall a,b,c \in \mathbb{N} : a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$

Bei der Abduktion handelt es sich um die dritte Umstellung der Elemente Fall, Resultat und Gesetz. Ausgehend von einem gegebenen Resultat erkennen wir einen hierfür ursächlichen Fall.

Resultat:	$\mathrm{R}(x_0)$
Gesetz:	$\forall i : \mathrm{F}(x_i) \Rightarrow \mathrm{R}(x_i)$
Fall:	$\mathrm{F}(x_0)$

Weil die Abduktion nur auf einen möglichen Fall führt, handelt es sich natürlich um einen hypothetischen Schluss. Entscheidend ist, dass das Gesetz nicht eine sichere bzw. gegebene Prämisse dieses Schlusses darstellt. Der Fall ist bereits in der Bedingung des Gesetzes enthalten. Wenn nun das Gesetz gegenwärtig ist, dann ist dies also auch der Fall. Die Generierung einer Hypothese geschieht vielmehr ausgehend von nur einer Prämisse – dem Resultat. Wir müssen daher unterscheiden zwischen der kognitiven Generierung einer Hypothese und der öffentlichen Darstellung derselben, welche dann mit dem Schema rekonstruierbar ist.

In dem Vortrag wurde zur Veranschaulichung der Abduktion eine Schüleräußerung zu der folgenden Aufgabe rekonstruiert:

$$\begin{array}{r} 123 \\ +987 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 234 \\ +876 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 345 \\ +765 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 456 \\ +654 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 567 \\ +543 \\ \hline \end{array}$$

Ausgehend von der Gleichheit der Ergebnisse erkannte der Schüler mittels der folgenden Abduktion das Gesetz von der Konstanz der Summe als ursächlich für die Gleichheit der Ergebnisse:

Resultat:	Das Ergebnis ist immer 1110.
Gesetz:	Wenn in einer Summe ein Summand erhöht und ein anderer Summand um dieselbe Zahl verringert wird, dann verändert sich das Ergebnis nicht.
Fall:	In den Beispielen werden die Summanden jeweils um dieselbe Zahl (111) erhöht und verringert.

Die dargestellte Abduktion konkretisiert den entscheidenden logischen Schluss dafür, wie ein Schüler eine mögliche Ursache für ein beobachtetes Phänomen findet. An dieser Abduktion können auch qualitative Unterschiede in der Art von Abduktionen verdeutlicht werden: Wenn einem Schüler, der eine solche Abduktion vollzieht, das Gesetz von der Konstanz der Summe zuvor nicht bekannt war, spricht Eco ([2], S. 299ff) von einer kreativen Abduktion. Mittels einer kreativen Abduktion wird also nicht nur ein neuer Fall, sondern auch ein neues Gesetz entdeckt. Wenn dem Schüler das Gesetz seiner Abduktion zuvor bekannt war, dann liegt seine Leistung nicht in der Generierung des Gesetzes, sondern in der Assoziation dieses Gesetzes zu dem gegebenen Resultat. Eco unterscheidet je nach der Codiertheit des bekannten Gesetzes zwischen über- und untercodierten Abduktionen. Liegt die Assoziation des Gesetzes quasi auf der Hand, wird die Abduktion als übercodiert bezeichnet. Um einen solchen Abduktionstyp würde es sich handeln, wenn ein Mathematikexperte die obige Abduktion vollziehen würde. Liegt die Assoziation des bekannten Gesetzes jedoch nicht quasi auf der Hand, bezeichnet Eco die Abduktion als untercodiert. Um einen solchen Abduktionstyp handelt es sich beispielsweise, wenn der Schüler das Gesetz von der Konstanz der Summe aus einer Vielzahl bekannter Gesetze als das plausibelste ausgewählt hätte.

Die Abduktionstypen Ecos erlauben eine Schärfung des Begriffs „Entdeckung“: Da die Abduktion die entscheidende Schlussform für die Generierung neuen Wissens ist, bedarf es für jede Entdeckung einer Abduktion. Jedoch geht umgekehrt nicht mit jeder Abduktion eine Entdeckung einher, zumal die naheliegende Assoziation eines bekannten Gesetzes zu einem Resultat kaum als Entdeckung bezeichnet werden kann. Entsprechend scheinen übercodierte Abduktionen zunächst nicht prädestiniert für die Schärfung des Begriffs „Entdeckung“ zu sein. Die Rekonstruktion von Abduktionen in [3] zeigt jedoch, dass auch übercodierte Abduktionen Entdeckungen bergen können, wenn die entscheidende Leistung darin besteht, den Fall als Fall des Gesetzes zu erkennen. Für eine Entdeckung bedarf es demnach Abduktionen,

a) bei denen das Gesetz zuvor nicht bekannt war und/oder
b) bei denen das Resultat nicht leicht als Resultat des (schon bekannten) Gesetzes zu erkennen ist und/oder
c) bei denen der Fall nicht leicht als Fall des (schon bekannten) Gesetzes zu erkennen ist.

2. Die Abduktion als (Teil) der Forschungslogik interpretativer Unterrichtsforschung

Ein Schüler, der eine Entdeckung vollzieht, erkennt Zusammenhänge ausgehend von gegebenen (mathematischen) Phänomenen. Der interpretative Unterrichtsforscher, der Schüleräußerungen analysiert, versucht die inhärente Struktur der Schüleräußerung zu erkennen, um im Gesagten eine

Sinnstruktur zu erkennen, auch wenn sie nur latent ist. Ebenso wie der Schüler beim entdeckenden Lernen vollzieht der interpretative Unterrichtsforscher Abduktionen. Auf Grund der oben angesprochenen Differenz zwischen der kognitiven Generierung und der sprachlichen Veröffentlichung einer Abduktion lässt der Fall einer Abduktion des Unterrichtsforschers nicht das konkrete Denken eines Schülers erfassen. Zum Beispiel können Äußerungen ausgehend von der kognitiven Generierung auch stets auf den Gesprächspartner ausgerichtet sein oder einer Mischung mehrerer Hypothesen entspringen. Aufgrund dieser Differenz, können wir (nur) die rationale Struktur derjenigen Entdeckung rekonstruieren, die im Verständnis des Forschers vom Schüler veröffentlicht wurde.

Die Äußerung eines Schülers ist stets in einen Kontext eingebettet. Um eine Äußerung angemessen rekonstruieren zu können, muss dieser Kontext bei der Interpretation stets berücksichtigt werden. Die Spezifik von Äußerung und Kontext unterstreicht wiederum die Forderung interpretativer Unterrichtsforscher möglichst kreative Abduktionen zu vollziehen (vgl. [1], S. 244ff und [4], S. 112), so dass die Äußerung mittels eines neuen Gesetzes erklärt und nicht vorschnell einer bestehenden Klasse zugeordnet wird.

Eine Abduktion ist prinzipiell unsicher. Insbesondere können der Fall, der Zusammenhang zwischen Gesetz und Resultat und bei kreativen Abduktionen auch das Gesetz hypothetisch bleiben. Es bedarf also einer Begründung der gewonnenen Erkenntnis. In [3] habe ich daher nicht nur Abduktionen rekonstruiert, sondern auch deren Zusammenspiel mit Induktionen und Deduktionen, mittels derer Hypothesen geprüft bzw. begründet werden.

3. Literatur

[1] Beck, Christian & Jungwirth, Helga: Deutungshypothesen in der interpretativen Forschung. In: Journal für Mathematikdidaktik 20(4), 1999

[2] Eco, Umberto: Hörner, Hufe, Sohlen. Einige Hypothesen zu drei Abduktionstypen. In: Eco, Umberto & Sebeok, Thomas A. (Hg.): Der Zirkel oder im Zeichen der Drei – Dupin, Holmes, Peirce. München, Fink 1985

[3] Meyer, Michael: Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument. Doktorarbeit. Franzbecker, Hildesheim 2007

[4] Voigt, Jörg: Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. Beltz, Weinheim 1984