

Andreas FEST, Berlin

Vom Modell zum Algorithmus – Kombinatorische Optimierung im Mathematikunterricht

Fragestellungen aus der Kombinatorischen Optimierung, die mit Hilfe von Graphenalgorithmien gelöst werden können, begegnen uns in verschiedenen Alltagssituationen. Beispiele aus der Optimierung von Bahnnetzen oder der Routenplanung in Straßennetzen sind dabei auch für Schülerinnen und Schüler greifbar und eignen sich somit hervorragend, um Probleme der Diskreten Mathematik im Schulunterricht zu behandeln. Wir wollen die Lernsoftware Visage vorstellen, mit deren Hilfe solche Themen im Mathematikunterricht der Sekundarstufen umgesetzt werden können.

Kombinatorische Optimierung im Alltag

Die Kombinatorische Optimierung ist ein Teilgebiet der Diskreten Mathematik, die sich mit der Untersuchung abzählbarer Mengen, insbesondere endlicher Mengen beschäftigt. Problemstellungen der Kombinatorischen Optimierung begegnen uns in Alltagssituationen wie z.B.

- der Planung von Bahnnetzen und Fahrplänen,
- der Tourenplanung von Postboten oder Müllwagen,
- der Routenplanung in Navigationssystemen oder mit Online-Software,
- der Frequenzzuweisung in Mobilfunknetzen.

All diese Problemstellungen lassen sich durch Graphen und Netzwerken modellieren und mit graphenalgorithmischen Methoden bearbeiten.

Eine typische Fragestellung aus diesem Bereich ist das Kürzeste Wege-Problem. Gegeben ist eine Autobahnkarte von Deutschland. Finde den kürzesten Weg entlang der Autobahnen von Berlin nach Köln. Diese Aufgabe kann man durchaus auch Schülerinnen und Schülern der Grundschule stellen. Die Lösung ist sehr einfach zu finden, es handelt sich fast um die „direkte Verbindung“. Leider ist die Lösung von solcher Aufgaben im Allgemeinen nicht durch einfaches „hingucken“ zu sehen, insbesondere dann, wenn man nicht den

kürzesten sondern den schnellsten oder den billigsten Weg sucht. Dabei können durchaus Umwege sinnvoll sein und man benötigt intelligente Algorithmen, um den besten Weg zu finden.

Kombinatorische Optimierung in der Schule

Dieser durchaus spannende Bereich der Mathematik wird bisher in der Schule viel zu wenig wahrgenommen. In den Vergangenheit beschränkten sich Beispiele zu diesem Thema in Schulbüchern oftmals auf das Finden von Eulerwegen in Graphen (Stichwort: „Das Haus vom Nikolaus“). Oder die Fragestellungen dienen allein dem Erzeugen von Rechenaufgaben, ohne dabei tiefer auf Modellierungsaspekte einzugehen.

Unser Anliegen ist es hingegen, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, wie Probleme der Diskreten Mathematik in der Praxis gelöst werden. Dabei wird insbesondere der Kompetenzerwerb in den Bereichen Problemlösen, Modellieren und Kommunizieren gefördert. Die Schülerinnen und Schüler lernen, Realsituationen mit Hilfe der Mathematik zu beschreiben, und trainieren daran das mathematische Modellieren unter verschiedenen Modellierungsannahmen. Anschließend lernen sie das Anwenden von Lösungsalgorithmen, was durch das selbständige entwickeln eigener Algorithmen unterstützt wird. Schließlich sollen die eigenen Ideen und Lösungen dokumentiert und präsentiert werden.

Lernsoftware Visage

Beim Verstehen algorithmischer Vorgehensweisen kann der Einsatz des Computers von großem Vorteil sein. Darüber hinaus kann der Computer aber bereits im Modellierungsprozeß den Schülerinnen und Schülern wichtige Hilfestellungen geben und somit den Prozess des entdeckenden Lernens unterstützen. Deshalb wird u.a. im Berliner Rahmenlehrplan für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I [1] der Einsatz geeigneter Lernsoftware für die beiden Lernmodule zur diskreten Mathematik empfohlen.

Die im DFG-Forschungszentrum Matheon entwickelte Lernsoftware „Visage“ setzt genau hier an. Als Bestandteil der interaktiven Geometrie-Software „Cinderella.2“ [2] bietet sie zunächst eine freie Experimentierumgebung zum

Umgang mit Graphen und Algorithmen. Darüberhinaus ist es auch möglich, eigene interaktive Arbeitsblätter zu gestalten, die dann als HTML-Dokumente exportiert werden können. Auf diese Weise erstellte Arbeitsblätter können im Internet veröffentlicht oder an die Lernenden weitergegeben werden. Neben der zugrunde liegenden Software wurden im Rahmen des Projektes zwei Lerneinheiten zu den Themen kürzeste Wege und Eulertouren entwickelt, die ein entdeckendes Lernen der Thematik ermöglichen. Diese Lerneinheiten sind auf der Projektseite [3] zu finden.

Nach einer kurzen Einleitung in die jeweilige Problemstellung stellen die Lerneinheiten zunächst ein Modellierungstool zu Verfügung, mit dem die reale Situation durch einen Graphen repräsentiert werden kann. Dabei wird Wert darauf gelegt, dass die Schülerinnen und Schüler eigene Ideen ausprobieren können. In weiteren Aufgaben sollen dann zusätzliche Eigenschaften von Graphen und ihrer Darstellung im Computer entdeckt und erforscht werden. Schließlich können Algorithmen zur Lösung der Problemstellung nachvollzogen werden. Ergänzt werden die Lerneinheiten jeweils durch ein Lexikon, in dem die verwendeten Fachbegriffe erklärt werden.

Die Rolle des Computers

Der Mehrwert, den der Computer bei der Behandlung von Fragestellungen aus der kombinatorischen Optimierung im Schulunterricht liefert, wird klar, wenn wir nachvollziehen, wie er in diesen Lerneinheiten verwendet wird und welche Rollen er im Lernprozess übernimmt.

Zunächst dient der Computer zur Visualisierung der Aufgabenstellung und der Lösungsalgorithmen. Dadurch wird es leichter, komplizierte Situationen und Zusammenhänge zu erklären. Beim eigenständigen Arbeiten der Schülerinnen und Schüler dient er hingegen zur Führung der Lernenden. Manche Konzepte oder Lösungsideen in der diskreten Mathematik sind zunächst schwer zu entdecken oder zu verstehen. Durch den Computer können nun Situationsbedingt direkte oder unterschwellige Hinweise gegeben werden, die die Schülerinnen und Schüler in eine richtige Richtung weisen. So können z.B. unbekannte Begriffe als Stichwörter gegeben werden, die zu neuen Ideen führen. In den interaktiven Experimentierfeldern werden je nach Eigenschaft eines Knotens oder einer Kante diese in unterschiedlichen Farben dargestellt.

Dies regt zur Erforschung an, was verschiedenfarbige Elemente unterscheidet und welche Eigenschaften sich bei der Veränderung der Konstruktion ändern. Durch die Einschränkung der Schülerinnen und Schüler, im Modellierungsschritt einen Graphen zu zeichnen, werden sie gezwungen, ein Strukturiertes Modell der Wirklichkeit zu entwerfen. Dabei erfolgt die Modellierung nicht auf einer symbolischen Ebene sondern bleibt auf einer ikonischen Ebene. Trotz dieser Einschränkung bleibt den Lernenden die Freiheit einen beliebigen Graphen zu zeichnen und somit verschiedene Modellierungen auszuprobieren. Bei ihren Experimenten erhalten sie durch die eingebauten Algorithmen eine direkte Rückmeldung über ihren Erfolg durch den Computer. Dies fördert das entdeckende Lernen in einem individuellen Lerntempo.

Resumé

Die Kombinatorische Optimierung liefert als „Mathematik für Entscheidungen“ einen reichhaltigen Fundus an anwendungsnahen Themen aus der Alltagswelt der Schülerinnen und Schüler. Das Entwickeln systematischer Lösungen mit Hilfe praxisrelevanter Algorithmen ermöglicht den Schülerinnen und Schülern ein authentisches Arbeiten und ermöglicht ihnen ein tieferes Verständnis der Strukturen, die hinter den Fragestellungen stecken. Die Lernsoftware Visage bietet ein interaktives Arbeiten mit lebendiger Mathematik und eröffnet den Lernenden neue und individuelle Lernwege.

Literatur

- [1] Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I, Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport, Berlin 2006
- [2] Jürgen Richter-Gebert, Ulrich Kortenkamp: Cinderella.2. Die interaktive Geometrie-Software. <http://cinderella.de/>, 2006
- [3] Ulrich Kortenkamp et al.: Visage – Visualisierung von Graphenalgorithmen. Projekt-Homepage. <http://cinderella.de/visage>, 2007
- [4] Stephan Hußmann, Brigitte Lutz-Westphal: Kombinatorische Optimierung erleben. (Hrsg.) Vieweg, Wiesbaden 2007