

Brigitte LENEKE, Magdeburg

Aufgabenvariation als produktive Schülertätigkeit – Beispiele und Erfahrungen

1. Ausgangssituation und Rahmenbedingungen

Mathematikunterricht als Problem lösender Unterricht und im Spannungsfeld zwischen Mathematik als Produkt und als Prozess verfolgt die Zielstellung kritisches, folgerichtiges und gründliches Denken einerseits zu entwickeln, andererseits aber auch Ideenreichtum, Beweglichkeit und Fantasie zu initiieren. Jedoch wird Anwendungsproblemen, weiterführenden Fragen und ungewohnten Lösungsideen noch zu wenig Zeit und Platz eingeräumt. Genau dort setzt das Forschungsprojekt „Aufgabenvariation als Unterrichtsgegenstand“ an (vgl. [1]). Dieses Projekt hat sich der Idee verschrieben, darüber nachzudenken, **wie** Schülerinnen und Schüler an der Erzeugung von Aufgaben beteiligt werden können, möglichst breite Erfahrungen im Unterricht dazu zu sammeln und auszuwerten sowie die gewonnenen Erkenntnisse und vor allem die Materialien dem „Unterrichtsalltag“ zur Verfügung zu stellen.

In Zusammenarbeit mit Mathematiklehrerinnen und -lehrern sowie Lehramtsstudentinnen und -studenten wurde versucht, in einigen Unterrichtsstunden Ideen dieses Projektes anhand ausgewählter Aufgaben aufzugreifen und umzusetzen. Aufgaben, Materialien und Erfahrungen sind in [2] bis [4] dokumentiert. Insbesondere ging es darum, in den einzelnen Klassen zu beobachten, **wer** die Variationen zu den „Initialaufgaben“ komponiert, **wie** dafür hilfreiche **Strategien** entwickelt und angewendet werden können, **wer** die gesammelten Anstöße und Fragen strukturiert, bewertet und selektiert und **wie** der weitere Lösungsprozess der „Aufgabenvariationen“ gestaltet werden kann. Durch Aufgabenvariation können Probleme „geöffnet“ werden, was gleichzeitig Möglichkeiten offeriert, zu einem „offenen Unterricht“ zu kommen.

2. Inhaltliche und didaktisch-methodische Aspekte

Bewährt hat sich bisher folgender Unterrichtsverlauf, der auch von uns als Ausgangsbasis genutzt wurde (vgl. [1]):

- a) Es wird eine Aufgabe (**Initialaufgabe**) vorgegeben und gelöst.
- b) Die Schülerinnen und Schüler werden dann aufgefordert, diese Initialaufgabe zu variieren:
 - b₁) ohne bewusste Anwendung heuristischer Strategien;

In dieser Anfangsphase ist es günstig, durch so genannte „Leitfragen“ den Schülerinnen und Schülern das Anliegen und das Prinzip der Aufgabenvariation nahe zu bringen (vgl. [2]).

Beispiel: Was passiert, wenn die Eingangsdaten in ihrer Größe verdoppelt (verdreifacht, halbiert,...) werden?

b₂) indem jeder in der Aufgabe vorkommende Begriff nacheinander sinnvoll abgeändert wird (What-if-not-strategy);

b₃) bewusster Einsatz von **Basisstrategien**: geringfügig Ändern, Analogisieren, Verallgemeinern, Spezialisieren, Lücken beheben, Zerlegen, Kombinieren, Umzentrieren, Umkehren, Kontext ändern, Iterieren, anders Bewerten.

- c) Die einzelnen Vorschläge werden gesammelt.
- d) Die gesammelten Vorschläge werden dann geordnet, gruppiert, vorbewertet und ausgewählt.
- e) Die Lösung und Bearbeitung der ausgewählten Aufgabenvarianten erfolgt in unterschiedlichen Sozialformen und Arbeitsaufteilungen.
- f) Die Lösungen werden in geeigneter Form und Darstellung vorgestellt.

So können die Schülerinnen und Schüler mehr aus der bloßen Reaktion auf fremd gestellte Aufgaben herauskommen und erleben, wie ihre eigenen Fragen und Aufgaben den weiteren Unterrichtsprozess gestalten. Das Suchen nach neuen Fragen zu einem (gestellten) Problem zwingt zum inhaltlichen Durchdenken des Problems sowohl vom Sachkontext als auch von der mathematischen Seite her. Fächerübergreifende Fragestellungen, Vernetzungen auf unterschiedlichen Ebenen und zwischen verschiedenen (mathematischen) Bereichen ergeben sich wie von selbst und erfordern das entsprechende Wissen und Können von den Schülerinnen und Schülern. Das Aufgabenvariieren eröffnet allen Schülerinnen und Schülern Möglichkeiten, ihre Stärken und Schwächen zu erkennen und realistisch mit ihnen umzugehen.

3. Unterrichtsbeispiel

a) Initialaufgabe

Vergrößert man die Seitenlänge eines Quadrats um 3 cm, so beträgt sein Flächeninhalt 361 cm². Welchen Inhalt hatte das ursprüngliche Quadrat? ([5], S. 112, Aufgabe 12)

Die Lösungsidee wurde in der 1. Stunde im Unterrichtsgespräch erarbeitet. Von der Lehrerin erging der Hinweis neue Aufgaben zu finden, indem einfach jeder Begriff oder jede Größe der Initialaufgabe verändert wird. Die dann aufgestellten Aufgaben wurden in der 2. Stunde nach inhaltlichen Gesichtspunkten zusammengefasst in vier Gruppen bearbeitet.

b) Neue Fragen

1. Wie groß ist die Diagonale vom ursprünglichen Quadrat?
Vergrößert man die Länge der Diagonalen eines Quadrats um 3cm, so ...
2. Wenn man die Seitenlänge a eines Rechtecks um 2 cm und die Seitenlänge b um 3 cm verkleinert, wie groß ist dann der Flächeninhalt des ursprünglichen Rechtecks, wenn das verkleinerte Rechteck 252 cm^2 groß ist?
3. Vergrößert (verdoppelt, verdreifacht...) man die Seitenlänge eines Quadrats um 5 cm, (4 cm, 2 cm...), dann...
4. Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels, wenn die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrates gegeben ist? Wie ändert sich der Rauminhalt des Würfels, wenn die Seitenlänge variiert wird?
5. Wie ändert sich der Raum- und Oberflächeninhalt eines Quaders, wenn seine Seitenlängen verändert werden?
6. Wie lang wären die Seiten eines (allgemeinen, gleichseitigen, rechtwinkligen...) Dreiecks, wenn sein Flächeninhalt 256 cm^2 beträgt?
7. Wenn man in einem Quadrat die Länge der Diagonalen, die Seitenlänge oder den Flächeninhalt verkleinert, wie ändern sich dann andere Größen dieser Figur?
8. Wie ändern sich in allgemeinen Vierecken (außer Rechteck und Quadrat) Größen, wenn gegebene Größen verändert werden (z.B. Variation der Seitenlänge in einer Raute)?
9. a) Wie groß ist der Radius eines Kreises, wenn sein Flächeninhalt 361 cm^2 beträgt?
b) Vergrößert man den Radius eines Kreises um 3 cm, so beträgt sein Flächeninhalt 400 cm^2 . Welchen Inhalt hatte der ursprüngliche Kreis?
- 10.a) Vergrößert man die Seitenlänge eines Quadrats um 3 cm, so beträgt sein Umfang 344 cm. Welchen Umfang hatte das ursprüngliche Quadrat?
b) Vergrößert man den Umfang eines Quadrats um 4 cm, so beträgt sein Flächeninhalt 36 cm^2 . Welchen Inhalt hatte das ursprüngliche Quadrat?

11. In einer würfelförmigen Verpackung befindet sich eine Schokoladenkugel.

- a) Die Kugel hat einen Radius von 3,6 cm. Wie groß muss die Schachtel sein?
- b) Wie muss sich die Verpackung ändern, wenn die Schokoladenkugel größer wird?
- c) Wie groß ist der Oberflächeninhalt des Würfels, wenn sein Volumen 281 cm^3 beträgt?

d) e) Nach der Gruppierung der Aufgabenvarianten erfolgte dann die weitere Arbeit in den vier Gruppen: 1) Nr. 1, 2, 7; 2): Nr. 3, 4, 5; 3): Nr. 6, 8; 4): Nr. 9, 10, 11.

Den Schülerinnen und Schülern hat die Bearbeitung der Aufgaben Spaß gemacht. Defizite zeigten sich bei der Durchführung quantitativer Untersuchungen mit dem Ziel, funktionale Zusammenhänge zu finden. Jede Schülergruppe stellte ihre wesentlichsten Ergebnisse im Plenum vor. Außerdem wurde mit den Schülerinnen und Schülern herausgearbeitet, **wie** sie zu den Aufgabenvariationen gekommen sind. Dabei stellte sich heraus, dass sie unbewusst einige der o. g. **Basisstrategien** verwendet hatten. Dieses „Unbewusste“ sollte nun im weiteren Unterricht zum „bewussten Anwenden“ entwickelt werden.

[1] Schupp, Hans : Thema mit Variationen – Aufgabenvariation im Mathematikunterricht
Verlag Franzbecker, Hildesheim, 2002

[2] Der Mathematikunterricht - Variationen über ein mathematisches Thema; Jahrgang 49, Heft 5/2003

[3] Leneke, B.: Aufgabenvariation im Mathematikunterricht (Teil 2)
Technical Report Nr.3, 2003
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik
www.math.uni-magdeburg.de/reports/tr03.html

[4] Leneke, B.; Stankewitz, M.: Rund um einen Park – Aufgabenvariation in Klasse 7; PM, Heft 5/46. Jg. Oktober 2004

[5] Schulz, W.; Stoye, W. (Hrsg.): Mathematik 9 – Gymnasium Volk und Wissen Verlag GmbH, Berlin, 1995