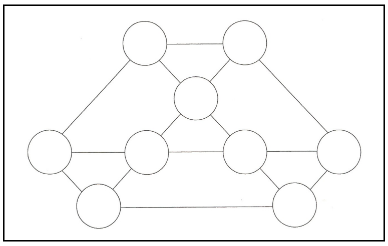
Friedhelm KÄPNICK, Münster

Intuitionen – ein häufiges Phänomen beim Problemlösen mathematisch begabter Grundschulkinder

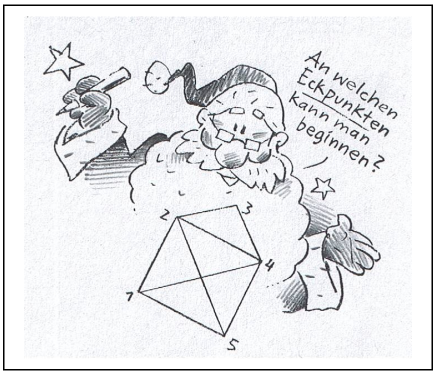
1. Beispiele für intuitive Kinderlösungen

1. Beispiel: Die Einsteinsche Dreiecksaufgabe
Aufgabe: Die neun abgebildeten Kugeln stellen Eckpunkte von vier kleineren und drei großen gleichschenkligen Dreiecken dar. Man soll die Ziffern 1 bis 9 in die einzelnen Kugeln so einschreiben, dass die Summe in jedem von diesen sieben Dreiecken immer die gleiche ist.



Michael (3. Kl.) sucht beim Problemlösen meist sofort nach Mustern, manchmal probiert er auch systematisch verschiedene mögliche Fälle. Beim Bearbeiten der Dreiecksaufgabe tastete er sich jedoch intuitiv an eine Lösung heran. Hierzu setzte er als erstes die größten Zahlen (7, 8, 9) in verschiedene Dreiecke ein. Als er erkannte, dass die „Dreieckssummen“ nicht übereinstimmen, verwarf er seine bisherigen Lösungsansätze und begann von neuem. Plötzlich sagte er: „Die Summenzahl in den Dreiecken muss immer 15 ergeben!“. Eine Erklärung hierfür konnte er uns nicht angeben, er war aber von der Richtigkeit seiner Behauptung (intuitiv) überzeugt …

2. Beispiel: Das „Haus vom Nikolaus“
Aufgabe: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, das Haus vom Nikolaus „in einem Zug“ zu zeichnen?
Felix (3. Klasse) probierte einige Male unsystematisch die Figur zu zeichnen, ohne mit dem Bleistift abzusetzen. Dann sagte er spontan: „Ich habe das Gefühl: Wenn man an der richtigen Ecke anfängt, dann kann man alles machen. Es müsste immer klappen.“



3. Beispiel: Die Hühner-Kaninchen-Aufgabe
Jan nahm stets mit großer Freude an unseren Förderstunden teil. Er arbeitete immer sehr aktiv mit und präsentierte gern seine Resultate Vom Temperament her war Jan eher ruhig, er wirkte geduldig und genügsam. Wenn es aber um das Lösen mathematischer Probleme ging, entwickelte der Junge meist eine

Hühner-Kaninchen-Aufgabe:
Im Stall von Bauer Lindemann sind Kaninchen und Hühner. Der Bauer sagt, dass die Tiere insgesamt 30 Beine haben.
Wie viele Hühner und wie viele Kaninchen könnten es sein?
Gib alle Lösungsmöglichkeiten an.

und lebhafte Begeisterung, wie z.B. beim Lösen der Hühner-Kaninchen-Aufgabe. Jan bearbeitete die Aufgabe Nils. Er war wiederum schnell von der Aufgabe begeistert. Von Anfang an knobelte er sehr motiviert, was der nachfolgende Transkriptauszug der Videoaufnahme belegt, der sich auf die unmittelbare Phase nach dem Lesen des Aufgabentextes bezieht:

Jan: „*Ich überleg grad noch mal.*" (Er schaut kurz zu Nils und beginnt so fort zu schreiben, während Nils noch einmal den Aufgabentext analysiert und dann neugierig auf Jans Blatt guckt.)
Jan: „*Jaaahh.*" (Er setzt sich auf, sieht Nils an, dreht den Stift in der Hand, stützt seinen Kopf in die Hand.) „*... und ... sind 10, Hühner und Kaninchen sind ja 4, also 20* (Dabei zeigt er mit dem Stift auf sein Blatt.) „*Das ergibt dann schon zusammen 30 …*"

Jans sprunghafte Gedanken sind nicht leicht zu verstehen. Sie bestanden offenbar darin, dass er zunächst von 5 Hühnern ausging, was (2·5=) 10 Beinen entspricht. Dann ergänzte Jan 5 Kaninchen, d.h. (4·5=) 20 Beine, um die geforderte Gesamtzahl von 30 Beinen zu erhalten. Er probierte offensichtlich intuitiv mit leicht zu rechnenden Anzahlen und fand auf diese Weise sehr schnell eine Lösung. Übrigens gab Jan innerhalb von 25 s eine zweite Teillösung an (6 Kaninchen und 3 Hühner), was vermuten lässt, dass er die Aufgabenstruktur auch sofort „durchschaut" haben musste.

Die Fallbeispiele, die aus unseren außerunterrichtlichen Projekten zur Förderung mathematisch begabter Dritt- und Viertklässler stammen, werfen Fragen auf, wie etwa:

- Wie lässt sich der Begriff „mathematische Intuition" definieren?
- Woran kann man „mathematische Intuitionen" erkennen?
- Inwiefern ist ein intuitives, sprunghaftes Vorgehen charakteristisch für das Problemlösen mathematisch begabter Kinder bzw. für einen bestimmten Typ der kleinen Matheasse?
- Schließen sich ein intuitives sprunghaftes Vorgehen und ein korrektes, vollständiges und gut verständliches Beschreiben eines Lösungsweges aus?
- Wie kann man in solchen lückenhaften Erklärungen die zweifellos jeweils vorhandene mathematische Substanz erkennen? Wie sollte man mit ihnen im regulären Mathematikunterricht umgehen?

Die Fragen skizzieren einen Forschungsschwerpunkt, mit dem ich mich seit etwa zwei Jahren intensiver beschäftige. Im Folgenden werden zu einigen Aspekten des Themenfeldes thesenhaft bisherige Arbeitsstandpunkte vorgestellt. (Erste Ergebnisse hierzu habe ich bereits 2006 auf der 40. Bundestagung der GDM in Osnabrück präsentiert.)

2. Zum Begriff „Intuition“

Zum Begriff „Intuition“ gibt es verschiedene Auffassungen:

- Intuition als unbewusstes „Schauen“ der Ideen *(Platon)*, als „Wesensschau“ in der Phänomenologie *(Husserl)*, was der allgemeinen Begriffsauffassung entspricht (wonach Intuition als geistiges Schauen, „Erfassenwollen“ von Gegenständen und Sachverhalten unter Verzicht auf bewusstes (wissenschaftliches) Denken sowie als unvermittelte und oft ganzheitliche Erfassung von Gegenständen, Sachverhalten, Begriffen, Sätzen, Werten usw. gekennzeichnet wird);
- Intuition als Evidenz (einleuchtende Erkenntnis) oder / und unmittelbare Gewissheit eines Lehrsatzes, Axioms usw. *(Descartes, Leibniz, Wolff, Locke und Hume)*, womit das Unbewusste angesprochen wird, das aber auf bewusstem Wissen basiert und deshalb einer Person die spontan akzeptierte Gewissheit verschafft;
- Intuition als plötzliche kreative Eingebung, als schöpferische Fantasie, als Moment künstlerischen Schaffens (Auffassung der *Kreativitätsforschung bzw. der emotionalen Intelligenzforschung)*;
- Intuition als „Weisheit“ des Unbewussten, die aus intensiven Empfindungen und vielfältigen Bildwelten besteht, die die Intelligenz der Sinne ausmachen *(Goleman 1999)*

Auf der Basis dieser sich z. T. „überlappenden“ Begriffsdeutungen und einer Analyse zahlreicher Fallbeispiele aus unseren Förderprojekten habe ich „konstruktiv“ wesentliche Aspekte zusammengetragen, die meine (vorläufige) Arbeitsdefinition zum Begriff „mathematische Intuition“ umreißen:

Mathematische Intuitionen bei „kleinen Matheassen“ sind

- ein vielfach auftretender und wichtiger phänomenologischer Aspekt mathematischen Problemlösens,
- sie basieren auf dem jeweiligen mathematischen Vorwissen und auf allgemeinen kognitiven Kompetenzen (z.B. flexiblem und „flüssigem“ Denken) des Problemlösers,
- sie sind zugleich durch ganzheitlich-komplexes, sinnlich-emotionales Erfassen eines mathematischen Sachverhalts gekennzeichnet,
- sie sind nicht ausschließlich an Sprache gebunden, sondern werden auch durch im Unbewussten subjektiv konstruierte komplexe „Bild- und Symbolwelten“ geprägt,
- sie können in allen Problemlösephasen auftreten und den jeweiligen Stil wie auch die Lösungsqualität mitbestimmen, und zwar
  - als sinnlich-emotionales ganzheitlich-komplexes Erfassen einer Problemsituation,
  - als plötzliche, mitunter vage Eingebung einer Lösungsidee,

- als bruchstückhafte oder diffuse Darstellung, Erklärung bzw. Begründung einer Problemlösung.

Nach unseren bisherigen empirischen Studien spielen bei allen mathematisch begabten Kindern Intuition beim Lösen anspruchsvoller Problemaufgaben eine Rolle. Hauptgründe könnten hierfür sein:

a) die sehr ausgeprägte Sensibilität dieser Kinder für Zahlen, Muster, …,
b) eine noch weitgehend fehlende Routine und die noch beschränkten mathematischen Kompetenzen von Grundschülern (Intuition spielt i. Allg. immer dann eine Rolle, wenn „bewusste Klarheit“ noch fehlt.),
c) das mehr oder weniger für Kinder typische spontane, offene und noch nicht „stilisierte“ Denken bzw. Herangehen an Problemaufgaben,
d) die Einordnung von Intuition als wesentlicher Aspekt kreativ-produktiven Tätigseins (vgl. z.B. Binnig 1989).

Unsere bisherigen empirischen Befunde zu Intuitionen lassen vermuten:

- Je schwieriger eine Problemaufgabe für ein mathematisch begabtes Kind ist, desto wahrscheinlicher beeinflussen Intuitionen das Problemlösen.
- Intuitionen sind subjektiv geprägt. Es gibt kleine Matheasse, die Probleme sogar vorwiegend intuitiv lösen. Hierbei kann man wiederum zwei Typen unterscheiden (vgl. Käpnick 2006).
- Intuitionen sind für Außenstehende meist nur sehr schwer zu erkennen. Ein zusätzliches Problem besteht darin, dass mitunter nicht eindeutig feststellbar ist, ob eine Lösung intuitiv ist oder ob ein Kind aufgrund sprachlicher Defizite keine verständliche verbale Erläuterung angeben kann. Dennoch erlauben unsere bisherigen Studien, verschiedene Erscheinungsformen für kindliche Intuitionen zu unterscheiden, die eine wertvolle Orientierungshilfe beim Erkennen dieses wesentlichen Aspekts kreativ-produktiven Tätigseins sein können (vgl. z.B. Käpnick 2006).

Literatur

[1] G. K. Binnig: Aus dem Nichts - Über die Kreativität von Natur und Mensch. Piper, München 1989

[2] D. Goleman: Kreativität entdecken. Dt. Taschenbuchverl., München 1999

[3] F. Käpnick: Intuitives Erfassen, Vortasten und Lösen – ein besonderer Problembearbeitungsstil mathematisch begabter Grundschulkinder (Tagungsband der 40. GDM-Bundestagung von Osnabrück). Franzbe cker 2006