

Gert KADUNZ, Klagenfurt

Zeigen: Zur indexikalischen Verwendung von Zeichen beim Lernen von Mathematik.

Dieser Beitrag konzentriert sich auf den indexikalischen Aspekt der Zeichenverwendung beim Lernen von Mathematik, einem Aspekt, der zurzeit nicht im Zentrum der mathematikdidaktischen Diskussion steht, sofern sich diese überhaupt auf Semiotik bezieht. Mathematikdidaktische Publikationen im Umfeld der Semiotik befassen sich eher mit Fragen des diagrammatischen Denkens (Dörfler (2006), Hoffmann (2005), Kadunz(2006)) oder auch mit dem komplexen Begriff der Semiosis (Saenz-Ludlow (2006)).

Indizes bei Peirce

Im Unterschied zur vorhandenen Transformation der Peirce'schen Terminologie und der Peirce'schen Systematik die wesentlich Michael Hoffman (z.B. Hoffmann, 2005) für die Mathematikdidaktik geleistet hat und die vor allem das diagrammatische Denken betrifft, stehen gleichwertige Ansätze, welche den Begriff des Index bei Peirce für die Mathematikdidaktik durchleuchten - zumindest aus meiner Sicht – in dieser Ausführlichkeit noch nicht zur Verfügung. Daher greife ich zur Referierung der Peirce'schen Sicht auf Indizes auf Winfried Nöth's Handbuch der Semiotik (Nöth, 2000) zurück.

In der Peirce'schen Kategorisierung der Zeichen stehen die Indizes neben den ikonischen Zeichen und den Symbolen. Indizes verbinden und weisen auf etwas hin, wobei Zeichenträger und Bezeichnetes vorhanden sind. Insofern lenken Indizes unsere Aufmerksamkeit. Ein, wie Peirce es nennt, genuines Indexzeichen, lenkt diese Aufmerksamkeit wie durch einen Zwang. Als Beispiel kann man sich Spuren im Schnee und deren Verursacher vorstellen, oder den Wetterhahn und die Windrichtung, das Barometer und den Luftdruck oder einfach den Zeigefinger, der auf etwas zeigt. Solche Indizes nennt Peirce natürlich. Die indexikalische Verknüpfung von Zeichen und Bezeichnetem kann auch „künstlich“¹ sein. Hier siedelt Peirce die beispielsweise Bezeichnung von Eckpunkten eines Dreieckes mit Buchstaben an. Wenn auch die Beziehung zwischen dem Index und dem, worauf der Index verweist, bekannt sein muss, so kann aus einer indexikalischen Verwendung neues Wissen entstehen. So erkennen wir tri-

¹ Für seine Unterscheidung von natürlichen bzw. „künstlichen“ Indizes verwendet Peirce auch die Begriffe reagent bzw. designativ. (vgl. Nöth, 2000, S. 186)

vialer Weise, dass ein gedrehter Wetterhahn eine neue Windrichtung anzeigt. (vgl. Nöth, 2000, S. 185).

Ich halte fest, dass Peirce, zumindest in der Darstellung Nöth's, das von einem Index Bezeichnete als bekannt voraussetzt. So eröffnet sich nun die Frage, die auch Michael Hoffman (2005) in das Zentrum seiner Überlegungen stellte, nämlich die Frage nach der Entstehung neuen Wissens aus der Verwendung von Diagrammen, nun von der Seite der Indizes her. Als These formuliere ich, Michael Franz (1996) folgend, dass in der Verwendung von Indizes, im Zeigen sozusagen, Handlung und Herstellung von Inskriptionen zusammen treffen. Dieses Zusammentreffen kann eine Quelle neuen Wissens sein. Was können wir dazu von einer semiotischen Position aus sagen?

Empirie

Zur Unterstützung der Argumentation werde ich in knapper Form videobasierte Daten² vorstellen, die im Rahmen einer klinischen Untersuchung an einer österreichischen Schule gewonnen wurden. Zwei vierzehnjährige Schüler (8. Schulstufe) sollten folgende Problemstellung behandeln:

„Der Personenzug P (Länge 50m, Geschwindigkeit $v_P=54$ km/h) fährt von Knittelfeld in Richtung Klagenfurt. Zwischen Unzmarkt und Scheifling kommt ihm ein Schnellzug S (Länge 90m, $v_S=72$ km/h) entgegen. ... Wie lange dauert das direkte Aneinanderfahren der Züge, beginnend beim ersten „Aufeinandertreffen“ der Lokomotiven in L bis zum Zeitpunkt, bei dem die Zugenden in E sich begegnen? ... Wie lange ist die Strecke L bis E? Oder fallen diese Punkte zusammen?“ (Katzenberger, 2006, S. 222).

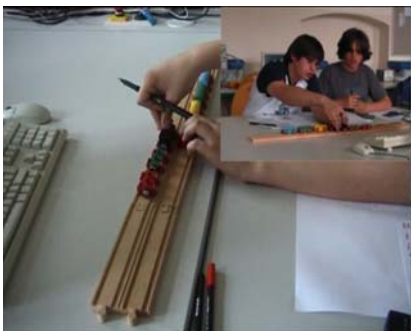


Abb. 1

Zur Bearbeitung dieser Frage stand den Lernenden neben Papier, Bleistift und Taschenrechner auch eine hölzerne Spielzeugeisenbahn zur Verfügung. Abb.1 zeigt die Lernenden, wobei die Videodaten den Eindruck vermitteln, dass unter Bezug auf die Spielzeugeisenbahn immer wieder zeigende Aktivitäten zu bemerken sind. Dabei können zwei Arten des Zeigens unterschieden werden. Einerseits ein hinweisendes Zeigen, wie es in Abb. 1 sichtbar ist. Hier zeigt ein Lernender den Ort

² M. Katzenberger hat mir diese Daten dankenswerterweise zur Verfügung gestellt. Sie entstanden im Rahmen seines an der Universität Klagenfurt durchgeführten Dissertationsprojektes.

des ersten Aufeinandertreffens durch entsprechende Aufstellung der Lokomotiven an. Einem solchen hinweisenden Zeigen steht ein darstellendes Zeigen gegenüber³.

„... *Das instruierende Zeigen bedarf keiner Zeigegesten wohl aber vorführender und darstellender Handlungen. Die Grundbedeutung ist etwas sehen lassen, was vorher nicht bekannt oder nicht klar war.*“ (Graumann, 1994, S. 58; zitiert nach Franz, 1996, S. 160).

Wollen wir einer beliebigen Person, also auch uns selbst, etwas darstellend zeigen, so versuchen wir einen Sachverhalt sinnlich wahrnehmbar werden zu lassen. Mittel bei diesem wahrnehmbar werden lassen können ikonische Zeichen sein (Inskriptionen oder im vorliegenden Fall Modelle, über deren Einordnung in die Peirce'sche Zeichenkategorisierung noch genauer nachzudenken ist). Das Angebot der Modelleisenbahn und der Zugriff der Lernenden auf ihre eigene Erfahrungswelt eröffneten den Lernenden den Einsatz einer beinahe unbegrenzten Anzahl von ikonischen

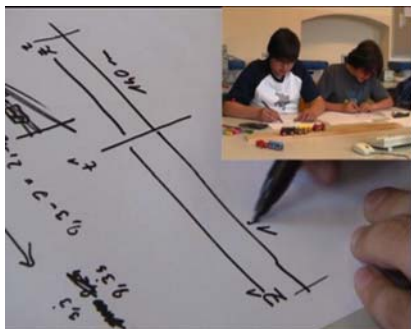


Abb. 2

Zeichen, um ihre eigene zeigenden Tätigkeit zu vollziehen. Andrea diSessa (2000) hat diesen freien Zugang aus einer anderen Perspektive untersucht. In dieser zeigenden Tätigkeit fügen die Lernenden ihre Zeichen zu neuen Ordnungen zusammen. Die Inskription in Abb. 2 entstand aus den wiederholten Beobachtungen der Bewegungen der Modelleisenbahn. Durch diese Bewegungen zeigten die Lernenden einander den Sachverhalt und versuchten dabei, eine Lösungsstrategie zu entwickeln. Ein wesentliches Ereignis auf dem Weg zu einer Lösung bildete der Verweis eines Lernender auf den Punkt des Aufeinandertreffens der Lokomotiven. Er zeigt ihn mit seinem Finger und kommentierte dies mit einem „Da ist genau Null!“. Damit war in die vorher unstrukturierte Bewegung der Züge – die Züge wurde in den ersten Minuten von den Lernenden nur gegeneinander bewegt – ein Ansatzpunkt gefunden, der in Folge zu einer immer strukturierteren Beschreibung der Fragestellung und des Lösungsweges führte. Diese neue Ordnung zeigt sich in Abb. 2 in Gestalt einer bemaßten Skizze, welche für die Lernenden zur Basis eines algebraischen Lösungsversuches wurde. Auch dadurch, und dies scheint wesentlich mathematische Tätigkeit zu charakterisieren, wurde etwas gezeigt, was wenige Augenblicke vorher für beide Lernende undenkbar war. Das nun Denkbare und gleichzeitig Sichtbare, ihr

³ Die englische Sprache würde hier zwischen to point and to show unterscheiden.

Lösungsansatz, wird nun selbst in unterschiedlichen Versionen hingeschrieben und damit wiederholt dem Sehsinn (vgl. Kadunz, 2006) zugänglich gemacht. Die eigenen Zeigeaktivitäten scheinen dabei die Lernenden bis an die Grenze des für sie Darstellbaren zu führen. Durch das Zeigen, so lassen es zumindest die Videodaten vermuten, drücken die Lernenden ihr Denken aus. Für den Beobachter bleiben die Aktivitäten aber immer im Bereich des Sinnlichen. Bei aller Vorsicht kann vermutet werden, dass das Sagen dieser Tätigkeit der sinnlichen Wahrnehmung nachfolgt. Das Sagen scheint einer Übersetzungsleistung zu bedürfen. Das zuvor Gezeigte sagt sich nicht, aber es zeigt sich uns und kann so eine Quelle neuen Wissens werden. In diesem Sinne könnte man Wittgensteins provozierende Aufforderung lesen: „Denk nicht, sondern schau!“ (Wittgenstein, 1984, S. 277)

Die Materialität der indexikalisch verwendeten Zeichen selbst hat, um mit Franz (1996, S. 163) zu sprechen, zur Folge, dass in sie mehr an ausdrucksfähiger Sinnlichkeit einfließt, als für die Funktion einer bloßen Mitteilung notwendig wäre, denn in einem solchen Zeigen spielt Unterschiedliches zusammen: Wahrnehmung, Bewegung, Sprache und etwas, das für das Lernen von Mathematik wohl wesentlich ist, das Grafische. Durch das Zeigen erwirtschaften sich die Lernenden gleichsam diesen Mehrwert des Sinnlichen, nämlich eine neue Sicht auf die Frage bzw. Problemstellung.

Literatur

- [1] Dörfler, W. (2006). "Diagramme und Mathematikunterricht." *Journal für Didaktik der Mathematik* **27** (3/4): 200-219.
- [2] Franz, M. (1996). "Sagen und Zeigen. Semiotische Grundfragen der Bildkommunikation." *Semiotische Berichte* **20** (2/3/4): 159-174.
- [3] Hoffmann, M. H. G. (2005). *Erkenntnisentwicklung*. Frankfurt am Main, Vittorio Klostermann.
- [4] Kadunz, G. (2006). "Schrift und Diagramm: Mittel beim Lernen von Mathematik." *Journal für Didaktik der Mathematik* **27** (3/4): 220-239.
- [5] Katzenberger, M. (2006). *Die Rolle händischer Inskriptionen beim Lernen von Mathematik*. Dissertation, Universität Klagenfurt.
- [6] Nöth, W. (2000). *Handbuch der Semiotik*. Stuttgart, Weimar, J.B. Metzler.
- [7] Sáenz-Ludlow, A. und N. Presmeg (2006). "Guest editorial semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically." *Educational Studies in Mathematics* **61**: 1-10.
- [8] Wittgenstein, L. (1984). *Werkausgabe in 8 Bänden, Band 1: Philosophische Untersuchungen*. Frankfurt am Main, Suhrkamp.