Ladislav KVASZ, Bratislava

Sprache und Zeichen in Algebra

Die Algebra hat ihre Wurzeln in der arabischen Mathematik. Bei den Arabern wurde die Algebra in der natürlichen Sprache ohne jede Symbolik betrieben. Das Lösen von Gleichungen bestand in der Umformung von Sätzen der arabischen Sprache, die um einige technische Ausdrücke der mathematischen Fachsprache erweitert wurde. Die Existenz von Algebra ohne jede Symbolik hinterfragt das Verständnis von Algebra als Denkweise, welche wesentlich Symbole verwendet. Anstatt Algebra als eine an Symbolverwendung gebundene Denkweise zu deuten, werde ich versuchen die Rolle der algebraischen Symbole als eine Vergegenständlichung von Operationen zu interpretieren.

1. Al-Chwarizmi und die quadratischen Gleichungen

Abu Abdallah Muhammad Al-Chwarizmi lebte zwischen 780-850 unserer Zeitrechnung. Er ist der Verfasser des *Kurzen Buches über das Rechnen von al-gebra und al-muqábala*. Bemerkenswert an diesem Algebrabuch ist, dass es ***keine Symbolik benutzt, sondern sich auf sprachliche Beschreibungen beschränkt***. Zum Beispiel verwendet *Al-Chwarizmi* für Potenzen:

schai (x - Ding), ***mal*** (x^2 -Vermögen), ***kab*** (x^3 - Würfel),

x^4 ist dann ***malmal***, x^5 ***kabmal*** usw. Bevor er eine Aufgabe zu lösen begann, reduzierte *Al-Chwarizmi* die entsprechende „Gleichung“ auf die kanonische Form. In der kanonischen Form entstehen nur positive Koeffizienten, wobei die höchste Potenz Eins ist. Um dies zu erreichen, führte er drei Operationen ein:

al-gabr – wenn auf einer Seite ein Term vorkommt, den man subtrahieren soll, so ist zu beiden Seiten der entsprechende Wert zu addieren

al-muqabala - wenn auf beiden Seiten gleiche Potenzen vorkommen, so subtrahiere man das kleinere Glied auf einer Seite von dem Größeren

al-rad – wenn der Koeffizient der höchsten Potenz von Eins verschieden ist, so dividiere man mit ihm die ganze „Gleichung“

Das Verfahren von *Al-Chwarizmi* werde ich nun am Beispiel der „Gleichung“ $x^2 + 10x = 39$ illustrieren. Er schreibt sie in der Form: „*Quadrat und Zehn seiner Wurzeln ist gleich neun und dreißig*“.

Al-Chwarizmis Lösung: *Nehme die Hälfte der Zahl der Wurzeln, das ist fünf, und multipliziere sie mit sich selbst, so bekommst du fünfundzwanzig. Addiere dies zu neununddreißig, du bekommst vierundsechzig. Nimm davon die Quadratwurzel, das ist acht, und subtrahiere von ihr die Hälfte der Zahl der Wurzel, das ist fünf. Das Resultat drei ist die gesuchte Lösung“.*

Die Methode kennzeichnet sich durch eine explizite Allgemeinheit. Die Begriffe *schai*, *mal*, *kab* ermöglichen es, dem Lösungsverfahren einen allgemeinen Charakter zu geben.

Betrachten wir folgendes Beispiel von Umformungen von algebraischen „Gleichungen“: *„Zehn habe ich in zwei Teile aufgeteilt, und diese habe ich durch die, und die durch diese geteilt, die Summe davon ist zwei Dihrame und ein Sechstel.“* In unserer Symbolik geht es hier um das Gleichungssystem $u + v = 10$, $u/v + v/u = 2{,}1/6$ das durch die Substitution $v = x$ und $u = 10 - x$ sowie nach Einsetzung in die zweite Gleichung folgende Gestalt erhält:

$$21{,}2/3\,x - 2{,}1/6\,x^2 = 100 + 2x^2 - 20x \qquad \textbf{\textit{al-gabr}}$$

$$100 + 4{,}1/6\,x^2 = 41{,}2/3\,x \qquad \textbf{\textit{al-rad}}$$

Al-Chwarizmi macht genau diese Schritte, ausschließlich in ***verbaler Form***: *„das wird einundzwanzig Dinge und zwei drittel Dinge ohne zwei Vermögen und einem sechstel Vermögen gleich hundert und zwei Vermögen ohne zwanzig Dinge.* ***Al-gebriere das****, und addiere die zwei Vermögen und einem sechstel Vermögen zu dem hundertzwei Vermögen ohne zwanzig Dinge, und addiere die von hundertzwei Vermögen weggenommenen zwanzig Dinge zu den einundzwanzig Dingen und zwei drittel Dinge. So hast du hundertvier Vermögen und einem sechstel von Vermögen gleich einundvierzig Dinge und zwei drittel Dinge.* ***Al-radiere das****.“*

2. Rezeption der arabischen Algebra in Europa

Die Wiedereroberung von Toledo im Jahre *1085* eröffnete die Möglichkeit die arabische Mathematik kennen zu lernen. Im Jahre 1145 wurde *Al-Chwarizmis Traktat über Algebra* übersetzt. Bei der Übernahme der Terminologie wurden die arabischen Termini durch ihre lateinischen Äquivalente ausgedrückt:

res	statt	***schai***	(Ding),
census	statt	***mal***	(Vermögen)
cubus	statt	***kab***	(Würfel).

Diese Terminologie finden wir in den ersten italienischen Büchern über Algebra aus dem Beginn des 14. Jahrhunderts.

2. 1 Regiomontanus (1436 - 1476)

Regiomontanus hat den Begriff der Wurzel eingeführt. *Aus der Operation des Radizieren ist so ein Objekt, die Wurzel, entstanden*. Für die Wurzel benutzte er das Symbol ***R*** vom lateinischen ***radix***.

$\sqrt{8}$ *R de 8* $\sqrt[3]{7}$ *R cubica de 7*

Abschnitte seiner Korrespondenz belegen eine der ersten Beispiele algebraischer Symbolik in der europäischen Mathematik. So schrieb er:

$$250^r \text{ ig } 25^c \text{ —— } 2^c \text{ et } 100 \text{ ig } 20^r$$

$$250x - 25x^2 = 2x^2 + 100 - 20x$$

Regiomontanus bezeichnete die Unbekannte mit *r*, vom lateinischen *res* (*Ding*), die zweite Potenz mit ***c*** vom lateinischen *census* (Abschätzung von Vermögen). Weiters schrieb er die Unbekannte als *oberen Index*. Operationen notierte er verbal. Für Gleichheit benutzt er eine horizontale Linie, die vielleicht das Gleichgewicht an einer Wage symbolisierte.

2. 2 Nicolas Chuquet (1445 - 1500)

Chuquet verfasste im Jahre 1484 die *Die Wissenschaft von Zahlen in drei Teilen*. Für die Operationen benutzte er die Wörter *plus* (mehr), *moins* (weniger), *multiplier* (multiplizieren), *partir* (dividieren). Die erste zwei Operationen bezeichnete er mit $\tilde{p}$ und $\tilde{m}$. An seiner Symbolik ist bemerkenswert, dass er *für die Potenzen der Unbekannten keine Symbole benutzte*. Er gab die Potenz durch einen ***Index*** beim Koeffizienten an. So bedeutet 4^1 $4x$, 4^2 meint $4x^2$ etc. Für die Konstante benutzt er den Index 0, so dass er 5 als 5^0 schrieb.

$6x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = -5$ $\qquad$ $6^3\ \tilde{p}\ 4^2\ \tilde{m}\ 2^1\ \tilde{p}\ 3^0$ egaulx $\tilde{m}\,5^0$

Die Wurzel bezeichnet er, ganz wie Regiomontanus, mit ***R***. So bedeutet R^2 30 in unserer Schreibweise $\sqrt{30}$. Chuquet verwendete auch negative Potenzen.

$42x^2 : 6x^5 = 7x^{-3}$ $\qquad$ $42^2 \div 6^5$ *egaulx* $7^{3\,\tilde{m}}$

Statt Klammern verwendete er Unterstreichungen:

$\sqrt{14+\sqrt{180}} = 3+\sqrt{5}$ $\qquad$ $R^2\ \underline{14\ \underline{\tilde{p}}\ \underline{R^2\ 180}}$ *egaulx* $3\ \tilde{p}\ R^2\ 5$

2. 3 Luca Pacioli (1445 - 1517)

Seine *Summe der Arithmetik, Geometrie, Proportionen und Proportionalitäten* erschienen im Jahr 1494. Seine Symbolik ist Chuquets Symbolik ähnlich. Allerdings verwendet er im dem Unterschied zu Chuquet den Buchstaben *c*, aus dem Italienischen *cosa* (Ding) für die Unbekannte, und statt des Unterstreichens bezeichnet er die Glieder, die unter einer gemeinsamer Wurzel stehen, mit dem Buchstaben *V*, vom lateinischen *universale*:

R V 35 $\tilde{m}$ R 50 $\qquad$ $\sqrt{35-\sqrt{50}}$

Er nannte seine Algebra *regula della cosa* (*Regel des Dinges*).

2. 4 Johannes Widmann (1462 - 1498)

Im Jahr 1489 erschien die *Behände und hübsche Rechnung auf allen Kaufmannschaft*. Damit erschienen zum ersten Mal die Symbole + und –, durch die Widmann Chuquets $\tilde{p}$ und $\tilde{m}$ ersetzte, in gedruckter Form. Auf diese Weise ***befreite Widmann die Buchstaben von ihrer Rolle als Operationssymbole***.

2. 5 Michael Stifel (1487 - 1567)

Stifels *Arithmetica integra* erschien im Jahr 1544. Er benutzte Widmanns Symbole + und − und die Symbole für die Potenzen der Unbekannten. Stifel benutzte für die erste Potenz das große ***R***, weil er das *kleine* ***r*** für die Wurzel verwenden wollte. Von ihm stammt das Symbol $\sqrt{\ }$, das ein stilisiertes r (*radix*) darstellt. Die quadratische Wurzel ist so $\sqrt{z}$, die kubische $\sqrt{c}$, die vierte $\sqrt{zz}$.

$3x^2+4x-\sqrt{5}x^3+\sqrt[3]{325}=0 \qquad\qquad 3z+4R-\sqrt{z}5c+\sqrt{c}325 \ \textit{equatur}\ 0$

Stifel war der erste Mathematiker, der *negative Koeffizienten* erlaubte.

3. Zusammenfassung

Am Beispiel des Al-Chwarizmi kann man erkennen, dass Algebra nicht mit der Verwendung von Symbolen beginnt — im Sinne der Mathematik — begann. Nicht die Symbolik, sondern die universale algorithmische Denkweise ist für die Algebra von entscheidender Bedeutung. Wenn wir uns die hundert Jahre von Regiomontanus bis Stifel vor Augen halten, so wird klar, dass die Symbolik nur langsam und schrittweise entstanden ist. Zu Beginn war sie oft nichts anderes, als die verkürzte Schreibung von Wörtern. Ein schlagendes Beispiel ist das Symbol für die Wurzel: Regiomontanus (*R cubica de* 8), Chuquet (R^3 8), Stifel ($\sqrt{c}$ 8), Descartes ($\sqrt[3]{8}$). Regiomontanus entwickelte die Idee, vom Wort *radix* nur den ersten ***Buchstabe R*** zu verwenden. Regiomontanus war aber nicht konsequent; das Wort *cubica* schreibt er aus. Chuquet schlug vor, den Grad der Wurzel durch einen ***Index*** anzugeben. Stifel tauschte das große R für ein kleines r, dessen oberer Teil verlängert sein kann, um auch etwas darunter anschreiben zu können. Den Grad der Wurzel teilte er aber unter der horizontalen Linie mit einem Buchstaben mit. Die moderne Konvention, die von Descartes stammt, benutzt alle diese Ideen. Das zeigt, dass die Symbolik eine komplexe Struktur besitzt. Wen Lernende Probleme mit der Symbolik haben, kann der Grund in einer missverständlichen Verwendungsweise der einzelnen Bestandteile dieser Struktur liegen. Aus semiotischer Sicht ist es interessant, dass zahlreiche algebraische Symbole rechnerische Verfahren darstellen, und diese Symbole die verfahren auf diese Weise zum Objekt machen.

Literatur

Erhard Scholz: *Geschichte der Algebra*. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1990.
Ladislav Kvasz: Changes of Language in the Development of Mathematics. Philosophia mathematica, Vol. **8** (2000), 47-83.
Ladislav Kvasz: History of Algebra and the Development of the Form of its Language. Philosophia Mathematica Vol. **14** (2006), 287-317.