Dieter SCHOTT, Wismar

Schwingungen als dynamische Systeme aus mathematischer Sicht

Schwingungen sind ein *zentraler Gegenstand* der Ingenieurausbildung. Sie spielen in allen Ingenieurdisziplinen eine wichtige Rolle. In mathematischen Lehrveranstaltungen kann man *Studentenprojekte* einbauen, in denen *Programmsysteme* zur *Simulation des dynamischen Verhaltens* von Schwingern entwickelt werden. Die Studenten sollen dabei auch lernen, die *Korrektheit* von Ergebnissen einzuschätzen. Dazu müssen sie die *Fehlerquellen* und ihre möglichen Auswirkungen kennen.

1. Harmonischer Schwinger

Das einfachste Schwingungsmodell ist der *harmonische Oszillator*. Schwingt ein Feder-Masse-System horizontal und werden dämpfende Einflüsse vernachlässigt, so heben sich die Federkraft (Steifigkeit c) und die Trägheitskraft (Masse m) auf. Die Auslenkung x verändert sich in der Zeit t nach der homogenen Differenzialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + cx(t) = 0.$$

Der *Parameterbereich* ist durch $m > 0$ und $c > 0$ festgelegt. Die beiden Parameter kann man auf einen reduzieren. Hier wird in der Regel die *Eigenkreisfrequenz*

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} > 0$$

genommen. Die Vorgabe der Anfangswerte

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

macht die Lösung eindeutig. Schwingt ein Feder-Masse-System unter Berücksichtigung des Gewichtes der Masse vertikal, so entsteht nach Verschiebung des Nullpunktes auf der x-Achse eine analoge Gleichung. Dieses einfache Modell hat die analytische Lösung

$$x(t) = x(\omega, x_0, v_0; t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Sie ist eine *harmonische Schwingung* mit der *Amplitude*

$$\hat{x} = \hat{x}(\omega, x_0, v_0) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Die Lösung hängt *stetig* von allen Argumenten ab (*gut gestelltes* Problem), ist *glatt* (beliebig oft differenzierbar) und *periodisch* mit der Schwingungsdauer

$$T = T(\omega) = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Die Ableitungen der Auslenkung x ergeben deren *Geschwindigkeit* $\dot{x}$ und deren *Beschleunigung* $\ddot{x}$. Das Geschwindigkeits-Weg-Gesetz (Phasenporträt) führt bei fester Frequenz in Abhängigkeit von den Anfangswerten auf konzentrische Ellipsenbahnen (Energieniveaus). Die *potenzielle* und die *kinetische* Energie sind ebenfalls harmonische Zeitfunktionen. Die Gesamtenergie bleibt von Anfang an konstant:

$$E = E(\omega, x_0, v_0) = E_{pot} + E_{kin} = \frac{1}{2}cx^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}\hat{x}^2\omega^2 = E_0.$$

Bei komplizierteren Schwingern sind die Lösungen der Differenzialgleichungen meist nur numerisch zu ermitteln. Die Qualität solcher Verfahren lässt sich auch daran messen, wie gut die Schwingung des harmonischen Oszillators ermittelt werden kann. Eine weitere Möglichkeit ist die numerische Berechnung der Energie. Nur wenn die Energiefunktion annähernd konstant verläuft, ist eine gute Qualität der Lösung zu erwarten.

Ist die Frequenz des Schwingers fehlerbehaftet ($\Delta\omega = \tilde{\omega} - \omega$), so sind die Fehler in x am Anfang klein. Trotzdem entsteht nach einer Zeit von

$$\Delta t = \frac{\pi}{\Delta\omega}$$

ein Phasenunterschied von π und damit die maximal mögliche Differenz in $x(t)$. Trotzdem liegen die beiden Phasenkurven aber eng benachbart.

In der Lehre wird man als einfachste Methode zur Lösung von Differenzialgleichungen das explizite *Euler-Verfahren* behandeln, obwohl in den Software-Paketen weit bessere Verfahren zum Einsatz kommen. Das Euler-Verfahren zeigt aber die numerischen Fehler ganz augenscheinlich, die bei ausgefeilten Methoden erst nach wesentlich höherer Auflösung sichtbar werden. Schreibt man die Modellgleichung mit der Ersetzung $v = \dot{x}$ als System erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\tilde{c}x \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} = \frac{c}{m},$$

so vergrößert sich die Energie beim Euler-Verfahren schrittweise:

$$E(x_{k+1}, v_{k+1}) = (1 + h^2\omega^2)E(x_k, v_k).$$

Dieser Prozess führt auch zu einer ständigen Amplitudenvergrößerung. Kennt man die numerischen Ursachen dieses Prozesses nicht, würde man auf Energiezufuhr von außen schließen.

2. Modifizierte Schwingermodelle

Bei einer Verfeinerung des bisher betrachteten Modells wird man die dämpfenden Einflüsse und die Wirkung äußerer Kräfte f berücksichtigen. Am einfachsten ist es, die Dämpfungskraft proportional zur Geschwindigkeit $\dot{x}$ anzusetzen (*viskose Dämpfung*, Konstante d). So gelangt man zum linearen Oszillator

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + cx(t) = f(t) \quad (m > 0,\, d \geq 0,\, c > 0).$$

Auch diese Differenzialgleichung ist (für viele f) analytisch lösbar. Sie umfasst aufgrund verschiedener Parameter, Anfangsbedingungen und Eingangsgrößen eine Vielzahl von Phänomenen, die man durch Simulation untersuchen kann. Beim Fehlen äußerer Kräfte ($f(t) = 0$) erhält man für schwache Dämpfung ($d^2 < 4cm$) eine exponentiell abklingende Schwingung, deren Eigenfrequenz kleiner als die Eigenfrequenz des entsprechenden harmonischen Schwingers ist. Stärkere Dämpfung führt zu nicht schwingenden Abklingvorgängen. Bei harmonischer Erregung f kann man Resonanzphänomene und Einschwingvorgänge studieren.

Der lineare Schwinger besitzt einen Gleichgewichtszustand ($x = v = 0$). Dieser ist *stabil*, weil kleine Auslenkungen aus diesem Zustand zu kleinen Schwingungen führen bzw. für $d > 0$ sogar asymptotisch zum Gleichgewicht zurückkehren. Gibt man aber die Vorzeichenbedingungen für die Parameter auf, erhält man einen erstaunlichen Reichtum an verschiedenen Gleichgewichtsstrukturen, den man mit Simulationen erkunden kann. Natürlich entsteht die Frage, ob die zunächst virtuellen Systeme auch reale Entsprechungen haben.

Bei der Simulation realer Schwinger muss man stets die Modellvoraussetzungen im Blick behalten. Ist z.B. die Dämpfung nicht vernachlässigbar, führt das Modell des harmonischen Schwingers bei größeren Zeitintervallen zu unakzeptablen Resultaten.

Das ebene Pendel genügt bei viskoser Dämpfung der nichtlinearen Modellgleichung

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + c\sin x(t) = f(t).$$

Ihre Lösung ist mit elementaren analytischen Funktionen nicht mehr möglich. Daher kommen numerische Löser zum Einsatz. Bei kleinen Auslenkungen x gilt $\sin x \approx x$, sodass das Modell des linearen Schwingers einsetzbar ist. Oftmals kennen Studenten nur dieses Modell für das Pendel. Für

Simulationen mit größeren Pendelausschlägen würden sie auf der Grundlage des linearen Modells völlig falsche Ergebnisse bekommen. Im ungedämpften Fall weicht die nichtlineare Schwingung deutlich von der linearen Schwingung ab. Sie sieht für nicht zu große Ausschläge optisch noch „ziemlich harmonisch" aus, hat aber eine kleinere Frequenz.
Bei realen Schwingern ist die Dämpfung nicht zwangsläufig viskos. Wichtige alternative Ansätze sind *Coulomb-Dämpfung* und *turbulente Dämpfung*. Wenn man die Möglichkeit hat, sollte man beim realen Prozess die *Kennlinie* der Dämpfungskraft bestimmen und für den Simulationsprozess verwenden.
Bei gedämpften Vertikalschwingungen einer mit zwei horizontalen Federn gefesselten Masse ergibt sich nach vereinfachenden Substitutionen folgendes Modell

$$y'' + 2Dy' + 2\left(1 - \frac{l}{\sqrt{y^2+1}}\right)y + k = 0.$$

Die Ableitung bezieht sich auf die dimensionslose Zeit. Wir setzen außerdem die Anfangsbedingungen

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0$$

voraus. Für $l = 1.2$ und $k = 0.01$ erhält man drei Gleichgewichtszustände

$$y_{01} \approx 0.6465, \quad y_{02} \approx 0.0250, \quad y_{03} \approx -0.6793,$$

von denen nur der mittlere instabil ist. Für bestimmte Anfangswerte kann man (wegen der numerischen Fehler) nicht vorhersagen, welcher stabile Gleichgewichtszustand erreicht wird. Für $D = 0$ (keine Dämpfung) ermittelt man mit MATLAB numerisch eine minimal schwingende und abnehmende Energiekurve (statt einer Konstante).

3. Schwingermodelle mit mehreren Freiheitsgraden

Ketten von linearen Feder-Masse-Dämpfer-Elementen erfüllen das lineare Differenzialgleichungssystem (Matrix-Vektor-Form)

$$M\ddot{\vec{x}}(t) + D\dot{\vec{x}}(t) + C\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

das sich wieder als System erster Ordnung schreiben lässt. Haben die *Eigenwerte* der entsprechenden Systemmatrix *negative Realteile*, so sind die Gleichgewichtszustände *stabil*. Auf Systeme dieser Art stößt man bei der Modellierung des Federungsverhaltens von Kraftfahrzeugen. Hier wird die äußere Erregung durch Straßenprofile beschrieben.