Dörte HAFTENDORN, Lüneburg

Dynamische Mathematik – Bewegung beflügelt Verstehen

1. Vorbemerkung

Naturgemäß kann man in einem Aufsatz die dynamischen Elemente eines Vortrages nur nennen und beschreiben. Ihre eigentliche Überzeugungskraft entfalten sie dabei nicht. Der Leser wird angeregt, sich die beweglichen Dateien im Internet unter www.mathematik-verstehen.de anzusehen.

Beim Einsatz dynamischer Mathematikwerkzeuge gibt es verschiedene Gesichtspunkte:

- Das Verstehen mathematischer Konzepte soll unterstützt werden.
- Besondere Zusammenhänge sollen visualisiert werden.
- Es soll erkundendes Lernen gefördert werden.

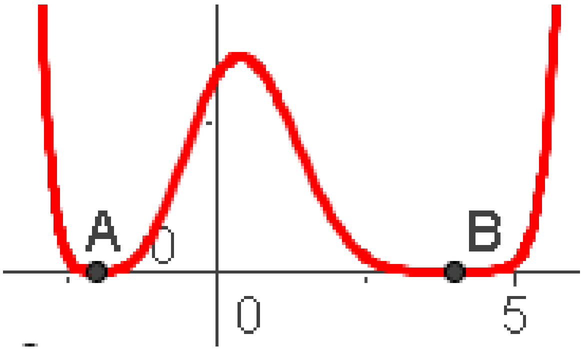
In allen drei Gebieten hat die Verfasserin in den letzten Jahren schon Vorschläge gemacht. In diesem Aufsatz folgen weiter unten noch einige neue Ideen.

In die erste Kategorie gehören Visualisierungen zu Folgen und zum Grenzwertbegriff, zur Iteration, zum Funktionsbegriff, zur Stetigkeit, zur Steigung von Kurven, zur Krümmung [1], zum Integralbegriff, zur Vielfachheit von Nullstellen (s.u.), zu Taylorreihen, zu stochastischen Verteilungen (s.u.), Regression [1], komplexen Funktionen (s.u.) und vieles mehr. In dieser Kategorie kann die einzelne Folge oder Funktion stets auch durch irgendeine andere ersetzt werden.

Zu den besonderen Zusammenhängen gehören visualisierbare Aussagen, die sich auf eine enger begrenzte Funktionen- oder Objektklasse beziehen. Das betrifft die von der Verfasserin früher vorgestellten "Polynome im Affenkasten" [3] ebenso wie vielfältige Erkenntnisse zu algebraischen Kurven [2]. Aber auch bei den sogenannten "Extremwertaufgaben" sind Visualisierungen speziell auf das Problem zugeschnitten (s.u.). Auch Veranschaulichungen der Binomischen Formeln, der Lösung quadratischer und kubischer Gleichungen in interaktiver geometrischer Art, der cardanischen Formeln im Komplexen [1] und überhaupt die geometrischen Sätze (Umfangswinkelsatz, Pythagoras, Höhensatz u.s.w) wären hier zu sehen.

Erkundendes Lernen ist eigentlich weniger eine Frage der mathematischen Gegenstände als eine des Herangehens. In einem Lehrzusammenhang ist sicher ein ausgewogenes Verhältnis von gemeinsam mit der Lerngruppe gemachten visuell unterstützen Erfahrungen, die dabei auch vielfältig verbalisiert werden, und eigenen Handlungen sinnvoll. Die Visualisierungswerkzeuge sollten von den Lernenden in jeweils eigenem Tempo und beliebiger Wiederholbarkeit bedienbar sein. Lernfilme, die automatisch ablaufen, sind hier keinesfalls gemeint. Im Gegenteil, DMS (Dynamische Mathematik-Systeme) sollen so einfach bedienbar sein, dass die Lernenden auch selbst ihren Lernprozess durch Variation der Beispiele oder durch neue eigene Entwürfe und Planungen voranbringen können. Im Vortrag wurden GeoGebra [www.geogebra.at] und MuPAD 4 [www.mupad.de] als besonders geeignet vorgestellt.

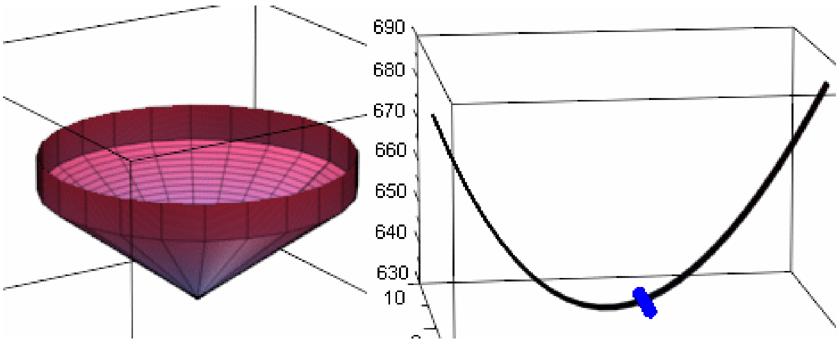
2. Beispiele (in Auswahl)



$$p(x) = t \cdot (x-a)^n \cdot (x-b)^m$$

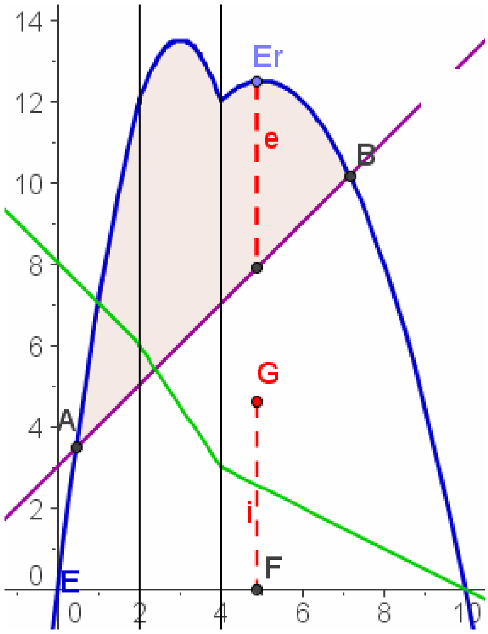
Bei diesem Polynom kann n dynamisch natürliche Zahlen durchlaufen, ebenso auch m. Mit der Variation von t holt man das Extremum zwische A und B in den sichtbaren Bereich.

Es lässt sich die Wirkung der Vielfachheit der Nullstellen auf den Graphen des Polynoms so erkunden, dass die Lernenden zur Vorhersage der Form befähigt werden. Bei der Bestätigung durch den Graphenzeichner erfahren sie sich als kompetent und überlegen. Sie haben wahrhaft Mathematik gelernt. Die Verfasserin hatte eben diese Überlegungen schon vor 30 Jahren ganz ohne Computer für mathematisch äußerst fruchtbar gehalten. In der Zeit vor dem Zentralabitur konnte sie ja dann auch entsprechende Aufgaben bis ins Abitur hinein stellen.

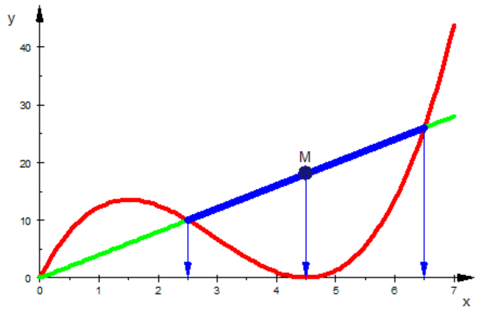


Ein Pokal von 2 l Inhalt mit minimalem Silberverbrauch

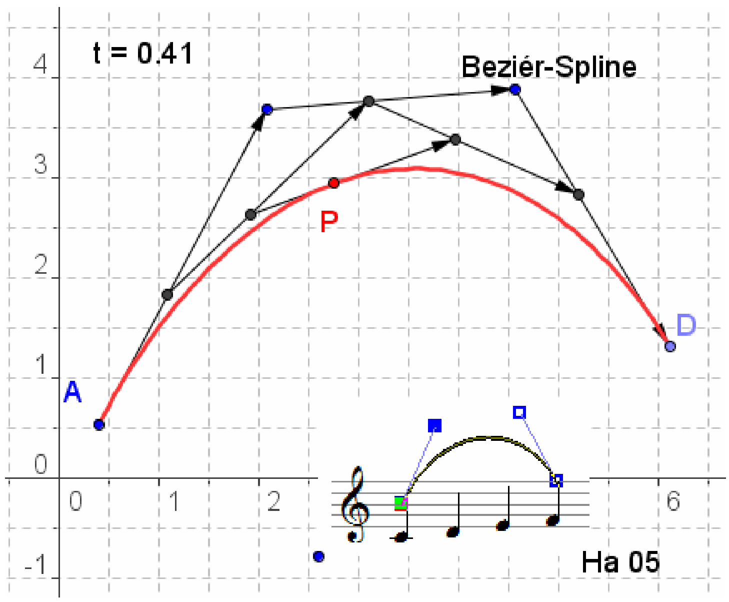
Bei diesem Beispiel für eine typische Extremwertaufgabe ist mit MuPAD 4 die Form des Spitzpokals durch einen Schieber veränderlich und simultan wird die Größe der Oberfläche (der Silberverbrauch) angezeigt. Der Pokal kann auch mit der Maus in jeder Raumrichtung bewegt werden. Übrigens hat der optimale Pokal einen deutlichen zylindrischen Rand.



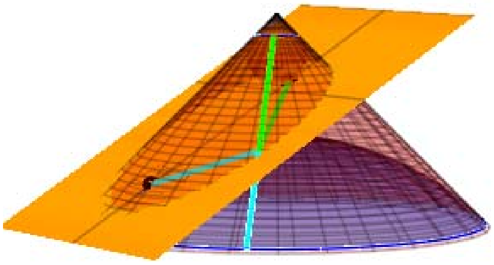
Bei diesem Beispiel aus der Ökonomie sind eine geknickte fallende Preis-Absatzfunktion, eine zugehörige Erlösfunktion und eine steigende Kostengerade dargestellt. Der Gewinn ist der Unterschied zwischen Erlös und Kosten. Zieht man nun den Punkt Er auf der Erlösfunktion, so zeichnet der Punkt G die Gewinnfunktion. So kann auch bei diesem zusammengesetzten Beispiel verstanden werden, wo der maximale Gewinn zu erzielen ist. Alle Parameter der beteiligten Funktionen sind variierbar, so dass mehrere konkrete Beispiele realisiert werden können.



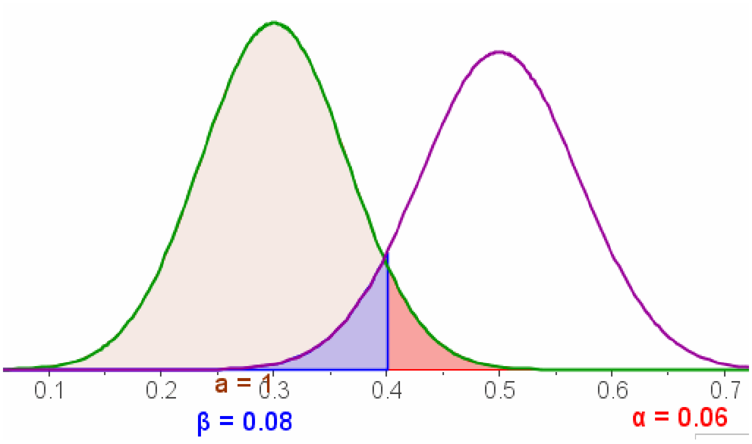
$p(x)=t\cdot x\cdot(x-a)^2$ Dreht man die Sekante um den Ursprung, liegt die Mitte der Sehne stets über dem Minimum. Es ist eindrucksvoll, dies bei allen Paramtervariationen bestätigt zu sehen. Natürlich möchte man es dann beweisen.



Variation des Teilungsverhältnisses t lässt den Punkt P auf der Bézierkurve wandern. Zieht man nachträglich an den Steuerpunkten, so verbiegt sich die Bézierkurve ebenso wie es der Notenbogen in einem Musiknotationsprogramm tut.

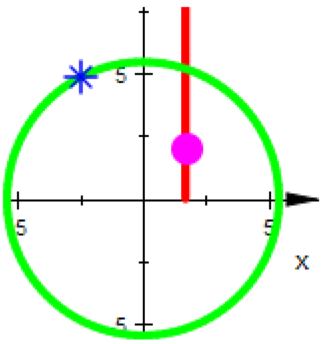


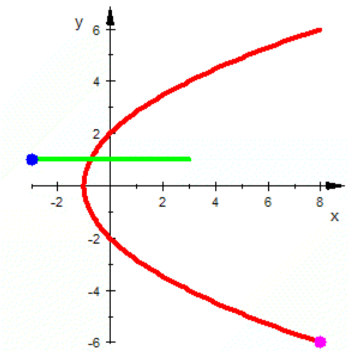
Wird ein Kegel in der gezeigten Weise von einer Ebene geschnitten, so kann man mit den Dandelinschen Kugeln beweisen, dass die Schnittkurve eine Ellipse ist. Dazu dreht man hier interaktiv die eingezeichnete Mantelstrecke.



Hier werden Alpha- und Betafehler beim Signifikanztest visualisiert.

Man kann die Glockenkurven bewegen und die Fehler beobachten.





Zur Visualisierung komplexer Funktionen lässt man einen Punkt auf einem Kreis oder einer Geraden laufen. Dann läuft der Bildpunkt auf einer Kurve.

Literatur

[1] Dörte Haftendorn: Dynamische Mathematik, Beiträge zum Mathematikunterricht,

[2] Dörte Haftendorn: Algebraische Kurven von der 8. Klasse bis zum 8.Semester, Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim 2004

[3] Dörte Haftendorn: Polynome im Affenkasten, Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker, Hildesheim 2003

[4] http://haftendorn.uni-lueneburg.de
www.mathematik-verstehen.de