Dieter RIEBESEHL, Lüneburg

Dynamische Visualisierungen zum Fundamentalsatz der Algebra

Funktionen einer komplexen Veränderlichen lassen sich im 3-dimensionalen Raum nicht vollständig veranschaulichen, da eine Dimension zu wenig zur Verfügung steht. Eine mögliche Visualisierung, die von einem der vielen Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra inspiriert ist, lässt sich nicht nur dazu verwenden, diesen Fundamentalsatz intuitiv verständlich zu machen, sondern auch dazu, das Verhalten von Polynomen in einer komplexen Veränderlichen unter verschiedenen Gesichtspunkten zu untersuchen. Dies führt zu einer Reihe von Beobachtungen und Fragestellungen, die sich mit einem dynamischen Mathematiksystem interaktiv erforschen lassen und interessante mathematische Hintergründe haben.

Der Fundamentalsatz und sein Beweis

Der Fundamentalsatz der Algebra lautet in heutiger Fassung[1]:

> Ist $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom mit beliebigen komplexen Koeffizienten, so gibt es eine komplexe Zahl α mit $f(\alpha) = 0$.

Den ersten vollständigen Beweis gab C.F. Gauß 1799 in seiner Dissertation ([3]). Gauß gab insgesamt vier Beweise dieses Satzes. Der dritte Beweis ([4]) in moderner Form verläuft so[2]:

> Lässt man die komplexe Zahl z einen Kreis vom Radius r um den Ursprung beschreiben, so wird das Polynom $f(z)$ eine geschlossene Kurve in der komplexen Ebene durchlaufen. Wenn $f(z)$ keine komplexe Nullstelle hat, dann kann man die Umlaufzahl $\phi(r)$ als die Anzahl der vollen Umläufe des Vektors von 0 zu $f(z)$ um den Ursprung definieren, während z einmal den Kreis durchläuft. ϕ ist

[1] siehe [2], S. 97

[2] entnommen aus [1], S. 204ff

eine stetige Funktion von r. $\phi(0) = 0$, denn die Bildkurve besteht nur aus dem festen Punkt a_0. Ist aber $r > 1$ und

$$r > |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|,$$

gewählt, dann besteht die Ungleichung

$$\begin{aligned} |f(z) - z^n| &\leq |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \cdots + |a_0| = r^{n-1} \left[|a_{n-1}| + \cdots + \frac{|a_0|}{r^{n-1}} \right] \\ &\leq r^{n-1} \left[|a_{n-1}| + \cdots + |a_0| \right] < r^n = |z^n|. \end{aligned}$$

Der Abstand von $f(z)$ zu z^n ist kleiner als der Abstand von z^n zum Ursprung. Deshalb kann die Verbindungslinie von $f(z)$ und z^n nicht durch den Ursprung gehen. Man kann also die Bildkurve von $f(z)$ in die Bildkurve für die Funktion z^n stetig deformieren, indem man längs der Verbindungslinie wandert. Die Umlaufzahl ändert sich dabei nicht, da der Ursprung nicht überstrichen wird. Die Umlaufzahl für z^n ist aber offensichtlich n, denn die Bildkurve ist ein Kreis um den Ursprung, der n-mal durchlaufen wird. Wenn r von 0 stetig zu großen Werten wächst, dann wächst die Umlaufzahl $\phi(r)$ stetig von 0 bis n. Sie kann aber nur ganzzahlige Werte annehmen, und das ist unmöglich.

Visualisierung komplexer Funktionen

Es liegt nun nahe, Funktionen im Komplexen dadurch zu visualisieren, dass mittels eines dynamischen Geometriesystems die Bildkurve eines Kreises um den Ursprung dargestellt wird. Polynome lassen sich über die Deutung der komplexen Multiplikation als Drehspiegelung besonders bequem realisieren (Abb. 1). Der Beweis lässt sich damit in allen Teilen veranschaulichen. Abb. 2 zeigt ein Beispiel für eine Bildkurve zu einem Polynom vom Grad 4 mit $\phi(r) = 4$.

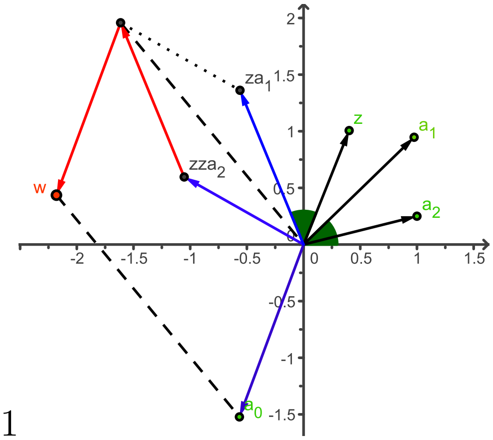

Abb. 1

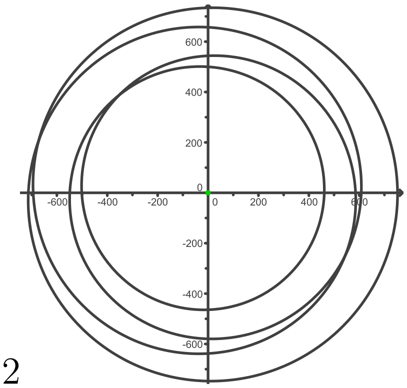

Abb. 2

Beobachtungen und Untersuchungen

Die dynamische Veränderung der Koeffizienten von $f(z)$ erlaubt die Untersuchung ihres Einflusses auf die Gestalt der Bildkurve. So erkennt man auch unmittelbar den Zusammenhang zwischen Singularitäten der Bildkurven und mehrfachen Nullstellen der entstehenden Polynome. Abb. 3 zeigt mehrere Doppelpunkte und Abb. 4 zwei Spitzen.

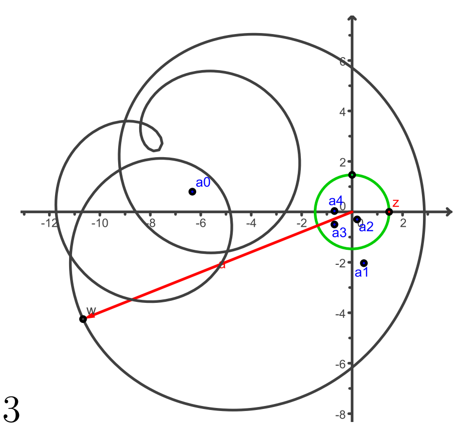

Abb. 3

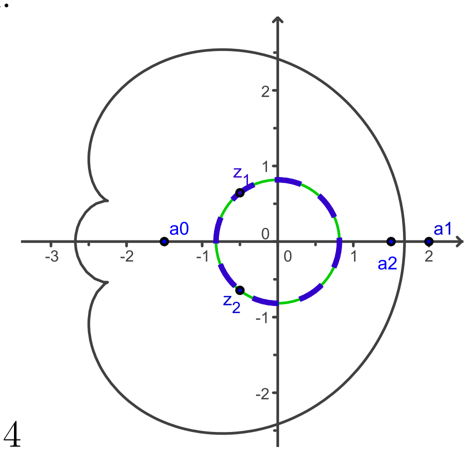

Abb. 4

Für Polynome vom Grad 2 und 3 lassen sich die Kreisradien, für die Spitzen auftreten, leicht rechnerisch bestimmen. Gibt man statt der Koeffizienten von $f(z)$ die Nullstellen vor, so lässt sich die Bildkurve in der Nähe einer dreifachen Nullstelle untersuchen. Überraschenderweise erweist sie sich dort als glatt!

Ausblick

Vielfältige weitere Untersuchungen lassen sich an das Bisherige anschließen, z.B. Spezialfälle wie Polynome mit reellen Koeffizienten, Singularitäten bei Grad 4 und höheren. Die Visualisierung lässt sich auch in drei Dimensionen fortführen, indem r als Parameter für eine Darstellung als Fläche hinzugenommen wird. Ein Beispiel zeigt Abb. 5 für ein Polynom dritten Grades und $0 \leq r \leq 1.5$.

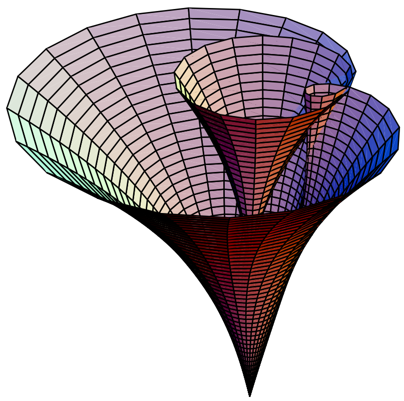

Abb. 5

Literatur

[1] Richard Courant, Herbert Robbins: Was ist Mathematik? Springer, Berlin, Heidelberg, New York, etc., 5. Auflage 2000

[2] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes et al.: Numbers. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, etc. 1991

[3] C. F. Gauss. Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Gesammelte Werke III, 31-56. Dieterich, Göttingen 1863

[4] C. F. Gauss. Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia. Supplementum commentationis praecedentis. Gesammelte Werke III, 57-64. Dieterich, Göttingen 1863