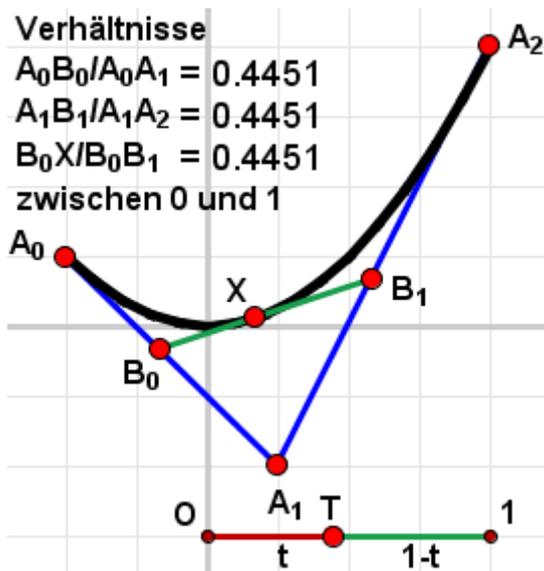


## Von Parabeln zu Freiformkurven mit Hilfe der Dynamischen-Geometrie-Software CINDERELLA 2.0

Der Beitrag handelt von ebenen Freiformkurven speziell Bézier-Kurven, da sich diese zum einen mit Hilfe Dynamischer-Geometrie-Software zum Beispiel mit dem Programm Cinderella 2.0 einfach darstellen und untersuchen lassen, zum anderen die zugrunde liegende Theorie weitgehend auf Schulniveau entwickelt werden kann. So genügt die Kenntnis der Streckenteilung, der Binomischen Formel und der Differentiation von Polynomen. Die interaktiven Applets findet man unter: [www-m10.ma.tum.de/~vogel/cagd](http://www-m10.ma.tum.de/~vogel/cagd).

### 1. Parabel als Bézier-Kurve vom Grad 2 erkennen

Ausgehend von einem Parabelbogen mit seinen Tangenten in den Endpunkten  $A_0$  und  $A_2$ , die sich stets in einem Punkt  $A_1$  schneiden, betrachten wir die Tangente in einem Punkt  $X$  auf dem Parabelbogen, die die Strecken  $A_0A_1$  und  $A_1A_2$  in den Punkten  $B_0$  und  $B_1$  schneidet.



Beim Verschieben des Punktes  $X$  erkennt man, dass sich auf den drei Strecken stets gleiche Verhältnisse zwischen 0 und 1 einstellen, was sich mit Cinderella durch Messen und Berechnen bestätigen und in der Sekundarstufe 2 auch analytisch leicht nachweisen lässt.

Teilt man umgekehrt die Strecken wiederholt im gleichen Verhältnis  $t:(1-t)$  mit  $t \in [0,1]$ , so erhält man einen Punkt  $X$  des Parabelbogens von  $A_0$  bis  $A_2$ , den man mit Cinde-

rella als Ortslinie von  $X$  zum Treiber  $T$  auf der Strecke  $01$  erhält.

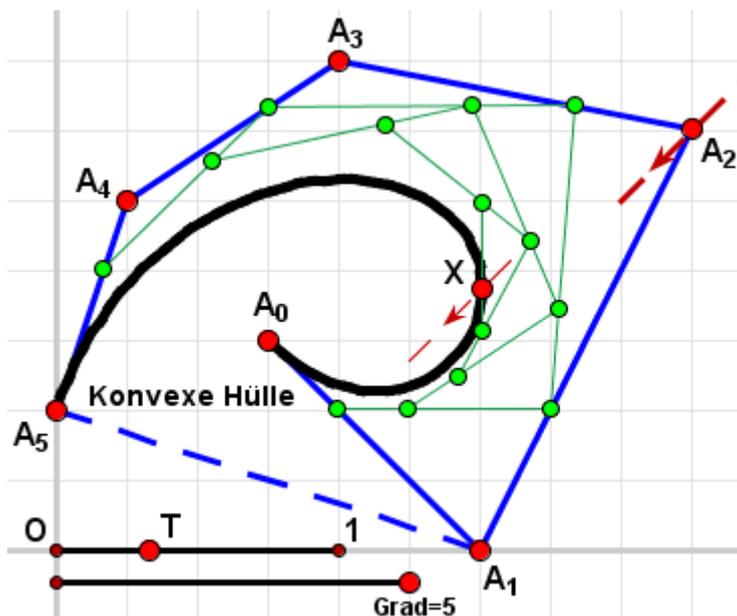
### 2. Streckenteilung konstruktiv und analytisch

Die bekannte konstruktive Übertragung des Teilverhältnisses auf eine Strecke  $AB$  kann man bei DGS-Programmen als Makro definieren, um damit die wiederholte Streckenteilung schneller zu erhalten. Dies setzt aber eine allgemeingültige stabile Konstruktion voraus, etwa durch Wahl der Hilfss- strecke senkrecht zur betrachteten Strecke  $AB$ . Insofern treten beim Arbeiten mit DGS-Programmen interessante neue Problemstellungen auf.

Analytisch erhält man den Punkt **C**, der eine Strecke **AB** im Verhältnis  $t:(1-t)$  teilt, als  $c=(1-t)\cdot a+t\cdot b$  mit  $t \in [0,1]$ , und kann mit der Programmiersprache CindyScript sämtliche Zwischenpunkte einfach bestimmen.

### 3. De Casteljau-Algorithmus für Bézier-Kurven

Durch Hinzunahme weiterer Kontrollpunkte erhält man Bézier-Kurven höheren Grades. Die Figur zeigt den de-Casteljau-Algorithmus, der rekursiv den Kurvenpunkt **X** zum Parameter **t** zwischen 0 und 1 liefert. Dabei werden die Zwischenpunkte und Strecken mittels CindyScript zur gegebenen Liste **pts** der Kontrollpunkte rekursiv bestimmt.



Rekursive Berechnung mittels CindyScript:

```
repeat( N, j,
  pts=pts;
  k=N-j+1;
  repeat( k, i,
    ptsc_(j+i)=pts_(j+i-1)*
      (1-t)+t*pts_(j+i);
  );
  pts=ptsc;
  drawall(ptsc);
  connect(ptsc);
);
X.xy=pts_(N+1);
```

Insofern ermöglicht Cinderella die Behandlung rekursiver Verfahren im Unterricht und fördert damit die Entwicklung algorithmischen Denkens.

Die Figur legt Vermutungen über die Tangenten in den Endpunkten des Kontrollpolygons sowie im Punkt **X** nahe, für deren Begründung eine Parameterdarstellung der Bézier-Kurven hilfreich wäre.

### 4. Parameterdarstellung von Bézier-Kurven

Eine Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(t)$  der Bézier-Kurven erhält man analytisch aus dem de-Casteljau-Algorithmus durch rekursives Einsetzen, was explizit allerdings nur für kleine Grade **n** sinnvoll ist.

Für allgemeinen Grad **n** erhält man mit Hilfe des Operators  $E: a_k \mapsto a_{k+1}$

$$x(t) = a_0^n \underset{\text{nach } n}{\overset{\text{Induktion}}{=}} [1-t+t E]^n a_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k E^k a_0 = \sum_{k=0}^n a_k B_k^n(t) ,$$

wobei die Binomische Formel sowie  $E^k a_0 = a_k$  verwendet wird.

$\mathbf{x}(t)$  ist somit die Linearkombination der Kontrollpunkte  $a_k$  mit den Bernsteinpolynomen  $B_k^n(t)$  vom Grad  $n$ , die in der Stochastik bei der Bernoullikette auftreten und daher in jeder Schulformelsammlung zu finden sind.

Offenbar spannt das Thema einen Bogen von der Elementargeometrie über die analytische Geometrie und Analysis bis hin zur Stochastik.

### 5. Weitere Eigenschaften der Bézier-Kurven entdecken

Durch Verschieben der Kontrollpunkte können wir weitere Eigenschaften der Bézier-Kurven entdecken, vgl. die gestrichelten Linien in obiger Figur.

Die **Konvexe-Hüllen-Eigenschaft** besagt, dass die Bézier-Kurve stets in der Konvexen Hülle ihres Kontrollpolygons liegt, wobei man die Konvexe Hülle mit CindyScript einfach über orientierte Flächeninhalte bestimmt.

Die **Pseudolokale-Kontrolle** besagt, dass bei Verschiebung eines Kontrollpunkts die Kurvenpunkte parallel dazu wandern.

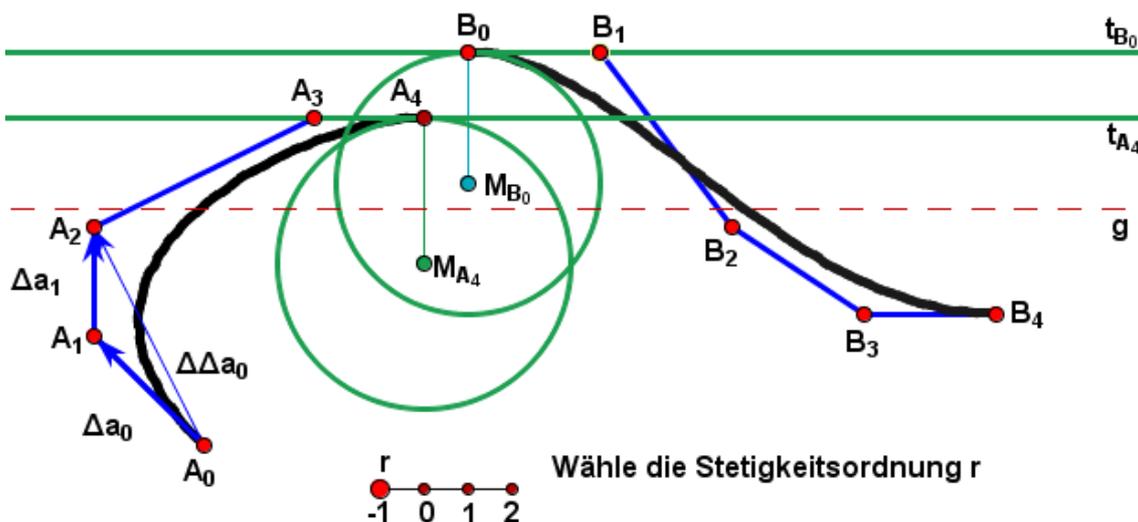
Diese Aussagen kann man sowohl geometrisch mit dem de-Casteljau-Algorithmus als auch analytisch mit der Parameterdarstellung begründen.

### 6. Tangenten, Krümmungen und geometrische Stetigkeit

Die Ableitungen der Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(t)$  einer Bézier-Kurve vom Grad  $n$  ergeben sich als iterierte Differenzen der Kontroll- bzw. Zwischenpunkte des de-Casteljau-Algorithmus, speziell:

$$\dot{\mathbf{x}}(t=0) = n \cdot \Delta a_0 \quad \text{mit } \Delta a_0 = a_1 - a_0 \quad (\text{vgl. Pascal-Dreieck})$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t=0) = n \cdot (n-1) \cdot \Delta^2 a_0 \quad \text{mit } \Delta^2 a_0 = \Delta(\Delta a_0) = a_2 - 2 \cdot a_1 + a_0$$



Mit Hilfe der Formel für die Krümmung erkennt man, dass die Krümmung

in  $A_0$  nur vom Grad  $n$ , der Länge von  $\Delta a_0$  und dem Abstand von  $A_2$  zur Tangente  $A_0A_1$  abhängt. Eine Verschiebung von  $A_2$  parallel zur Tangente  $A_0A_1$  ändert also die Krümmung in  $A_0$  nicht. Demnach gilt:

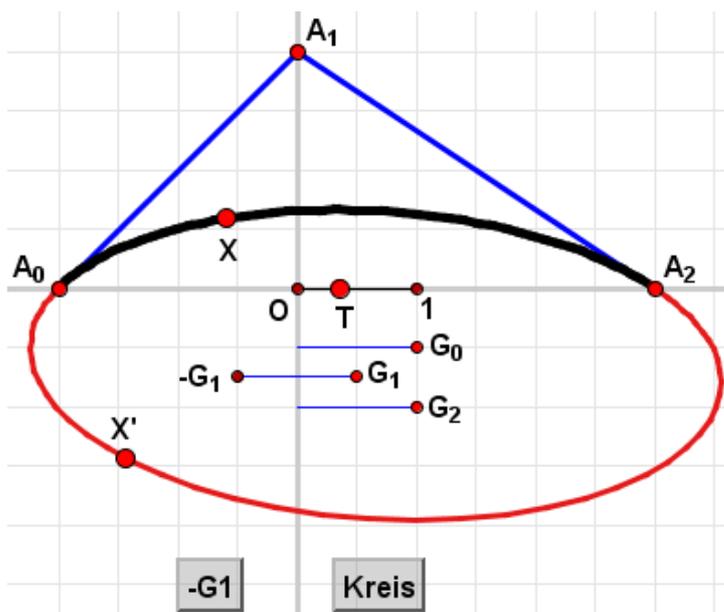
Zwei Bézier-Kurven mit den Kontrollpunkten  $A_0, \dots, A_n$  bzw.  $B_0, \dots, B_n$  sind:

- **stetig** verbunden, wenn  $B_0$  mit  $A_n$  zusammenfällt,
- **tangentenstetig** verbunden, wenn zusätzlich  $B_1$  auf der Tangente  $t_{A_n}$  liegt,
- **krümmungsstetig** verbunden, wenn zusätzlich  $B_2$  geeigneten Abstand zur Tangente  $t_{A_n}$  hat, d.h. auf einer Parallelen  $g$  zur Tangente  $t_{A_n}$  liegt.

Bei geometrischer Stetigkeit bleiben offenbar mehr Freiheiten für die Kontrollpunkte  $B_1, B_2$  als bei Forderung nach analytischer  $C^1$ -Stetigkeit.

## 7. Kreis als rationale Bézier-Kurve vom Grad 2

Da Cinderella intern mit homogenen Koordinaten arbeitet und diese in CindyScript zugänglich sind, kann man durch Hinzunahme von Gewichten ohne weiteres ebene rationale Bézier-Kurven erzeugen.



Die Figur zeigt einen Kegelschnittsbogen als rationale Bézier-Kurve vom Grad 2 mit den Gewichten  $G_0 = G_2 = 1$  und  $G_1 = c \in \mathbb{R}^+$ , der zusammen mit dem Bogen für  $G_1 = -c$  den gesamten Kegelschnitt bildet.

Dabei ist der Kegelschnitt für

- $0 < G_1 < 1$  eine Ellipse
- $G_1 = 1$  eine Parabel
- $G_1 > 1$  eine Hyperbel

Einen Kreis erhält man jedoch nur, wenn das Kontrollpolygon ein gleichschenkliges Dreieck bildet und das Gewicht  $G_1 = \cos \angle A_2A_0A_1$  gewählt ist.

## Literatur

- [1] Aumann & Spitzmüller: Computerorientierte Geometrie, BI 1993
- [2] Farin: Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design, Vieweg 1994