Galina PANAYOTOVA, Burgas

Computerspiele mit quadratischen Polynomen

Zu jedem quadratischen Polynom $P(A) = a_{11}x^2 + 2a_{12}x + a_{22}$ ordnen wir die Matrix $A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{matrix}$ zu. Wenn wir noch ein quadratisches Polynom $P(B) = b_{11}x^2 + 2b_{12}x + b_{22}$ mit Matrix $B = \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{matrix}$ haben, koennten wir beide Matrizen multipliziern, und es sei $C = AB$ mit entsprechenden Elementen

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12}, c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22},$$
$$c_{21} = a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12}, c_{22} = a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}.$$

Die Matrix $C = AB$ ist nicht immer symmetrisch. Wir ordnen ihr dem Polynom $P(C) = c_{11}x^2 + (c_{12} + c_{21})x + c_{22}$ zu und nennen ihn **Product von Polynomen** $P(A)$ und $P(B)$;schreibweise $P(C) = P(A) * P(B)$. Mit Computer Algebra ist es sehr leicht dieses Produkt zu untersuchen:

```
with(LinearAlgebra):
A:=Matrix([[a11,a12],[a12,a22]]);
Determinant(A);
B:=Matrix([[b11,b12],[b12,b22]]);
Determinant(B);
C:=Multiply(A,B);
```

$$C := \begin{bmatrix} a11\ b11 + a12\ b12 & a11\ b12 + a12\ b22 \\ a12\ b11 + a22\ b12 & a12\ b12 + a22\ b22 \end{bmatrix}$$

Es ist wohl bekannt(und leicht zu prüfen):

```
Determinant(C)= Determinant(A) Determinant(B)
```

Naemlich,wenn wir schreiben:

```
C:=Matrix([[c11,c12],[c21,c22]]);
```

Es folgt gleich:`Determinant(C)-Determinant(A)*Determinant(B)=0.`

Loese die Systeme Gleichungen

```
solve({c11=b11,c12=b12,c21=b12,c22=b22},{a11,a12,a22});
```

$\{a11 = 1, a22 = 1, a12 = 0\}$

```
solve({c11=a11,c12=a12,c21=a12,c22=a22},{b11,b12,b22});
```

$\{b12 = 0, b11 = 1, b22 = 1\}$

Gleich koennten wir beweisen, dass:

SATZ 1. Das Produkt von Polynomen ist kommutativ: $P(A) * P(B) = P(B) * P(A)$

SATZ 2. Bei der Multipizierung von Polynomen die einzige linke (und rechte) Einheit ist das Polynom $P(E)=x^2+1$ mit der unit Matrix $E=\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$.

Bezeichne

```
P(A):=a11*x^2+2*a12*x+a22;
```

$$\mathrm{P}\left(\begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{bmatrix}\right) := a11\ x^2 + 2\ a12\ x + a22$$

und loese die quadratische Gleichung

```
solve({P(A)=0},{x});
```

$$\{x = -\frac{a12 - \sqrt{-a11\ a22 + a12^2}}{a11}\},\ \{x = -\frac{a12 + \sqrt{-a11\ a22 + a12^2}}{a11}\}$$

Also die Nullstellen von $P(A)$ sind:

```
x1(A):=-(a12-(-a11*a22+a12^2)^(1/2))/a11;x2(A):=-(a12+(-
a11*a22+a12^2)^(1/2))/a11;
```

$$\mathrm{x1}\left(\begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{bmatrix}\right) := -\frac{a12 - \sqrt{-a11\ a22 + a12^2}}{a11}$$

$$\mathrm{x2}\left(\begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a12 & a22 \end{bmatrix}\right) := -\frac{a12 + \sqrt{-a11\ a22 + a12^2}}{a11}$$

und entsprechend fuer $P(B)$ und $P(C)$ .Dann haben wir

SATZ 3. Die Nullstellen von $P(A)$ und $P(AB)$(fuer beliebiges $P(B)$) zusammenfallen, genau dann wenn $P(A)$ ist eines von der folgenden drei Polynomen:

$$\mathrm{P}(a1) := \frac{a12\ (b11 - b22 + \sqrt{b11^2 - 2\ b11\ b22 + b22^2 + 4\ b12^2})\ x^2}{2\ b12} + 2\ a12\ x + \frac{2\ a12\ b12}{b11 - b22 + \sqrt{b11^2 - 2\ b11\ b22 + b22^2 + 4\ b12^2}}$$

$$\mathrm{P}(a2) := \frac{a12\ (b11 - b22 - \sqrt{b11^2 - 2\ b11\ b22 + b22^2 + 4\ b12^2})\ x^2}{2\ b12} + 2\ a12\ x + \frac{2\ a12\ b12}{b11 - b22 - \sqrt{b11^2 - 2\ b11\ b22 + b22^2 + 4\ b12^2}}$$

$$\mathrm{P}(a0) := -\frac{2\ a12\ b12\ x^2}{b11 - b22} + 2\ a12\ x + \frac{2\ a12\ b12}{b11 - b22}$$

Beweis. Wir loesen das System

```
solve({x1(A)=x1(C),x2(A)=x2(C)},{a11,a12,a22}
```

$$\{a22 = \frac{a12}{\mathrm{RootOf}(\_Z^2\, b12 - b12 + (-b11 + b22)\, \_Z, label = \_L5)},$$
$$a11 = \mathrm{RootOf}(\_Z^2\, b12 - b12 + (-b11 + b22)\, \_Z, label = \_L5)\, a12, a12 = a12\},$$
$$\{a11 = a11, a22 = -a11, a12 = -\frac{(-b22 + b11)\, a11}{2\, b12}\}$$

Bei der ersten Moeglichkeit haben wir die folgende Gleichung zu loesen:

```
solve({_Z^2*b12-b12+(-b11+b22)*_Z},{_Z});
```

$$\{\_Z = \frac{b11 - b22 + \sqrt{-2\, b11\, b22 + b11^2 + b22^2 + 4\, b12^2}}{2\, b12}\},$$
$$\{\_Z = \frac{b11 - b22 - \sqrt{-2\, b11\, b22 + b11^2 + b22^2 + 4\, b12^2}}{2\, b12}\}$$

Daraus entsteht die erste zwei Polynome .Von der dritten Moeglichkeit entsteht $P(a_0)$.

Damit ist Satz 2 bewiesen.Es lohnt sich zu bemerken, dass ohne Computer Algebra ist es sehrmuehsam oder fast unmoeglich den Satz zu beweisen. Aber mit Computer Algebra es ist wie ein Spiel. Die entsprechende Polynome $P(C)$ sind :

$$\mathrm{P}(c1) := \left(\frac{a12\, (b11 - b22 + \sqrt{b11^2 - 2\, b11\, b22 + b22^2 + 4\, b12^2})\, b11}{2\, b12} + a12\, b12\right) x^2$$
$$+ \left(\frac{a12\, (b11 - b22 + \sqrt{b11^2 - 2\, b11\, b22 + b22^2 + 4\, b12^2})}{2} + a12\, b22 + a12\, b11\right.$$
$$\left. + \frac{2\, a12\, b12^2}{b11 - b22 + \sqrt{b11^2 - 2\, b11\, b22 + b22^2 + 4\, b12^2}}\right) x + a12\, b12$$
$$+ \frac{2\, a12\, b12\, b22}{b11 - b22 + \sqrt{b11^2 - 2\, b11\, b22 + b22^2 + 4\, b12^2}}$$

$$\mathrm{P}(c2) := \left(\frac{a12\, (b11 - b22 - \sqrt{b11^2 - 2\, b11\, b22 + b22^2 + 4\, b12^2})\, b11}{2\, b12} + a12\, b12\right) x^2$$
$$+ \left(\frac{a12\, (b11 - b22 - \sqrt{b11^2 - 2\, b11\, b22 + b22^2 + 4\, b12^2})}{2} + a12\, b22 + a12\, b11\right.$$
$$\left. + \frac{2\, a12\, b12^2}{b11 - b22 - \sqrt{b11^2 - 2\, b11\, b22 + b22^2 + 4\, b12^2}}\right) x + a12\, b12$$
$$+ \frac{2\, a12\, b12\, b22}{b11 - b22 - \sqrt{b11^2 - 2\, b11\, b22 + b22^2 + 4\, b12^2}}$$

$$P(c0) := \left(-\frac{2\, a12\; b12\; b11}{b11 - b22} + a12\; b12\right) x^2 + (a12\; b22 + a12\; b11)\, x + a12\; b12 + \frac{2\, a12\; b12\; b22}{b11 - b22}$$

>

Bei der Figur 1 ist der dritte Fall animiert.

```
h1:=animate(eval(P(a0),[b11=-1,b12=6,a12=1/2]),x=-2..2,b22=0..3,thickness=2):         h2:=animate(eval(P(c0),[b11=-1,b12=6,a12=1/2]),x=-2..2,b22=0..3,thickness=3): display([h1,h2]);
```

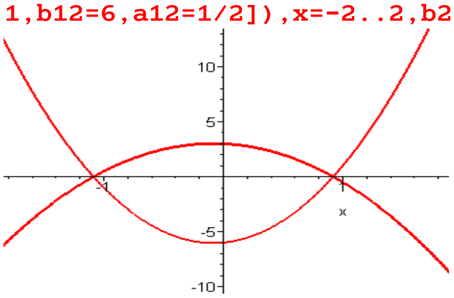

Fig. 1

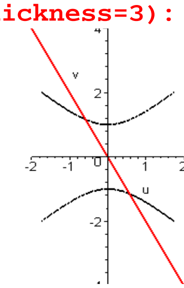

Fig.2

Involutory quadratische Polynome. Die folgende Elemente bestimmen die inverse Matrix von der Matrix A :

$$A12 := -\frac{a12}{a11\; a22 - a12^2},$$

Loese das System

```
solve({a11=A11,a12=A12,a22=A22},{a11,a22});
```

$$\{a22 = \mathrm{RootOf}(\_Z^2 + a12^2 - 1),\; a11 = -\mathrm{RootOf}(\_Z^2 + a12^2 - 1)\}$$

wir finden

$$P(I) := -\sqrt{-a12^2 + 1}\; x^2 + 2\, a12\; x + \sqrt{-a12^2 + 1}$$
$$P(J) := \sqrt{-a12^2 + 1}\; x^2 + 2\, a12\; x - \sqrt{-a12^2 + 1}$$

die nennen wir **Involutory Polynome** zu $P(A)$.Bei der Figur 2 sind diese Polynome animiert.Das Programm ist

```
with(plots):f1:=animate(P(I),x=-2..2,a12=-1..1,thickness=2):f2:=animate(P(J),x=-2..2,a12=-1..1,thickness=2,color=blue): display([f1,f2]);
```