Stefan GÖTZ, Wien

Stochastik (fast) ohne Zufall

Einleitung

„Die fachliche Ausbildung von Lehrkräften für Mathematik sollte daher folgende Ziele im Blick haben: [...]

2. die exemplarisch gewonnene *Einsicht* in den Nutzen der *Vernetzung* von Ideen und Methoden aus unterschiedlichen mathematischen Gegenstandsbereichen; [...]“

(Aus: *Für ein modernes Lehramtsstudium im Fach Mathematik*. Diskussionspapier. GDM-Mitteilungen 82, 2006, S. 71).

Im Folgenden nun ein paar Beispiele, wie diese geforderte Vernetzung realisiert und damit ein typisches Kennzeichen des Mathematik (Be-)Treibens exemplarisch auf elementarmathematischem Niveau gezeigt werden kann *(mathematische Miniaturen).*

BAYES for Beginners

Unter 1 000 000 deutschen Ein-Euro-Münzen befindet sich eine, die auf beiden Seiten „Adler“ zeigt, alle übrigen sind normal. Eine dieser Münzen wird zufällig ausgewählt und 20-mal geworfen. Dabei erscheint immer „Adler“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Münze normal ist (nach [5])?

Lösung: Es sei A das Ereignis „Münze ist normal“ und B das Ereignis „Es erscheint bei 20 Würfen immer ‚Adler‘“. Damit erhalten wir

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A)\cdot\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\cdot\frac{999999}{1000000}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\cdot\frac{999999}{1000000}+\frac{1}{1000000}\cdot 1} = \frac{999999}{2048575} = 0,488\ldots$$

Diese Rechnung eröffnet uns eine *neue Sichtweise:* Aus $\mathrm{P}(A) \approx 1$ (LAPLACE!) *a priori* wird $\mathrm{P}(A|B) \approx 0,49$ *a posteriori,* es liegt ein einfaches *Modell für „Lernen aus Erfahrung“* vor — Schema: Aus dem Vorwissen (von 1 000 000 eine Adler-Adler-Münze) wird mit Hilfe der erhobenen Daten (20-mal „Adler“ bei 20-mal werfen) eine neue Einschätzung der Situation generiert: Es ist nun wahrscheinlicher, dass die Adler-Adler-Münze vorliegt.

Anschlussfrage 1: Bei welcher Anzahl n von Münzen ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_n gerade $\frac{1}{2}$?— Schon die *Fragestellung* ist eine *mathematische!*

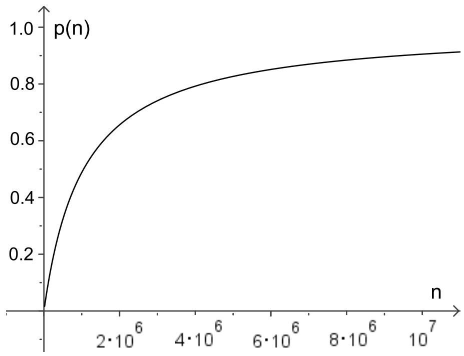


Abbildung 1: Zur Anschlussfrage 1

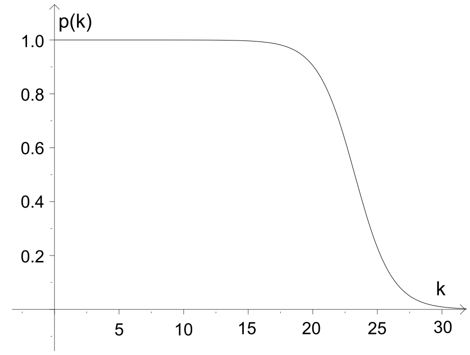
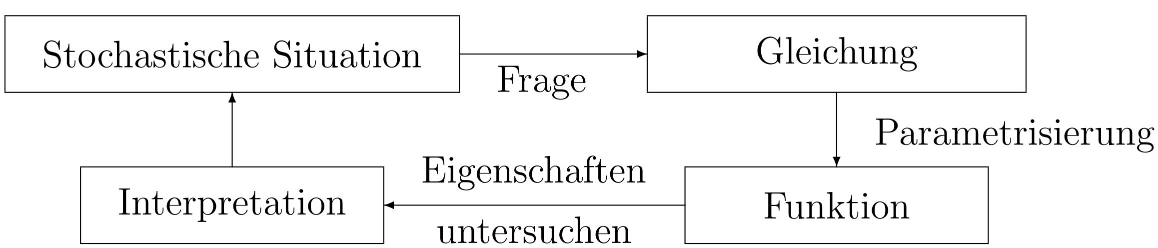


Abbildung 2: Zur Anschlussfrage 2

Der obige Ansatz $p_n := \frac{\frac{n-1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\frac{n-1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}+\frac{1}{n}\cdot 1} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}+\frac{1}{n}} \overset{!}{=} \frac{1}{2}$ führt auf eine *lineare Gleichung* in $\frac{1}{n}$, woraus $n = 2^{20} + 1 = 1048577$ folgt.

Schon die *Änderung der Notation* bereitet die neue Sichtweise vor: von der Gleichung zur *Funktion,* die eine *Übersicht* bietet. Den *Graphen* von $p(n)$: $n \mapsto p_n$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$ zeigt Abbildung 1. Ausrechnen liefert $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$ und $p_1 = 0$ und das können wir auch verstehen: Für wachsendes n, d. h. bei immer größer werdender Anzahl der Münzen, wird es immer unwahrscheinlicher, die eine „nicht normale“ Münze erwischt zu haben. Ist dagegen nur eine Münze vorhanden, dann ist das die mit den beiden gleichen Seiten.



Anschlussfrage 2: Wie oft muss man werfen, damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_k gleich $\frac{1}{2}$ ist? $p_k := \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\frac{999999}{1000000}}{\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\frac{999999}{1000000}+\frac{1}{1000000}\cdot 1} \overset{!}{=} \frac{1}{2}$ liefert $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{1999998}$, woraus $k = 19,93\ldots$ folgt. Weiterhin ist $\lim_{k\to\infty} p_k = 0$ und $p_1 \approx 1$. Abbildung 2 zeigt den *Graphen* von $p(k)$: $k \mapsto p_k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wieder gelingt die Interpretation: Je öfter „Adler“ erscheint, desto wahrscheinlicher ist es, dass

die Adler-Adler-Münze geworfen wird. Wenn dagegen nur einmal geworfen wird und „Adler“ erscheint, ist es wegen der großen Überzahl der normalen Münzen fast sicher, dass es sich um eine solche handelt.
Wird das *Monty Hall-Dilemma* BAYESianisch beschrieben, dann kann die (funktionale) Abhängigkeit der Gewinnwahrscheinlichkeit bei der Wechselstrategie vom Verhalten der Spielleiterin, wenn der Kandidat zuerst die Autotür erwischt hat, studiert werden: [2].
Die Abhängigkeiten von *Prävalenz – Sensitivität – Spezifität – Prädikation* bei medizinischen Tests zur Diagnose von (seltenen) Krankheiten bieten ein weites Feld für Untersuchungen von funktionalen Zusammenhängen, die das BAYES'sche Theorem liefert.

Zum EULER-Jahr

kann das Problem der vertauschten Briefe, welches bekanntlich auf die *Reihen*darstellung von $\frac{1}{e}$ führt, wie folgt abgewandelt werden: eine Gesellschaft bestehe aus n Personen von denen jede ein Geschenk mitbringt. Die Geschenke werden eingesammelt und jedes durch Los wieder unter *allen* Anwesenden verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass *eine bestimmte Person kein* Geschenk zurückbekommt? Die Lösung führt auf die *Folgen*darstellung von $\frac{1}{e}$, Verallgemeinerungen und Grenzwertbetrachtungen bringen die POISSON-Verteilung und ihren Zusammenhang mit der Binomialverteilung und schließlich die Reihendarstellung von e^{λ} $(\lambda > 0)$ mit sich. Dabei werden Methoden der Analysis zum Untersuchen stochastischer Fragestellungen angewendet und analytische Resultate stochastisch motiviert ([1]).

Zwei Münzen

haben jeweils die Beschriftung „1“ und „2“. *Frage:* Können diese so verfälscht werden, dass die drei Ausprägungen $2, 3, 4$ der geworfenen (Augen-)Summe gleichwahrscheinlich werden? — Die Antwort *„nein“* kann mit Hilfe *elementarer Algebra* begründet werden: X_i beschreibe die geworfene Zahl der i-ten Münze: $i = 1, 2$ und $\mathrm{P}(X_1 = i) =: p_i$ und $\mathrm{P}(X_2 = j) =: q_j$, $i, j = 1, 2$. Es ist $\mathrm{P}(X_1 = i, X_2 = j) = p_i \cdot q_j$, die Münzen sind unabhängig voneinander. Unser Wunsch lautet: $p_1 \cdot q_1 = \frac{1}{3}$, $p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1 = \frac{1}{3}$ und $p_2 \cdot q_2 = \frac{1}{3}$. Umformen und Einsetzen liefert $\frac{{q_2}^2 + {q_1}^2}{q_1 \cdot q_2} = 1$, $(a-b)^2 \geq 0$ impliziert $\frac{a^2+b^2}{a \cdot b} \geq 2$ für $a, b > 0$.

Die *Polynommultiplikation*

$$(a_2x^2 + a_1x) \cdot (b_2x^2 + b_1x) = a_2b_2x^4 + (a_2b_1 + a_1b_2)x^3 + a_1b_1x^2$$

entspricht der obigen Wahrscheinlichkeitsberechnung!
Betrachte also $p_2t^2 + p_1t =: G_{X_1}(t)$, das ist die *erzeugende Funktion* von X_1, und analog $q_2t^2 + q_1t =: G_{X_2}(t)$. Dann muss $G_{X_1}(t) \cdot G_{X_2}(t) = G_{X_1+X_2}(t)$ sein: $(p_2t^2 + p_1t) \cdot (q_2t^2 + q_1t) = \frac{1}{3} \cdot (t^2 + t^3 + t^4)$. Division durch $t^2 \neq 0$ liefert $(p_2t + p_1) \cdot (q_2t + q_1) = \frac{1}{3} \cdot (1 + t + t^2)$. Links gibt es *reelle Nullstellen*, rechts nicht, ein anderes *algebraisches* Argument (siehe dazu auch [3])!
Die umgekehrte Fragestellung (nach [4], S. 54 und S. 226 f.) lautet: Bei *fairen* Münzen ist die Verteilung der Augensumme bekanntlich $(\frac{1}{4}|\frac{1}{2}|\frac{1}{4})$. Kann diese auch anders — durch Verfälschen der einzelnen Münzen — erreicht werden? NEIN, denn wie oben müsste $(p_2t^2 + p_1t) \cdot (q_2t^2 + q_1t) = \frac{1}{4} \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot t^3 + \frac{1}{4} \cdot t^4$ sein, also $(p_2t + p_1) \cdot (q_2t + q_1) = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2 \cdot t + t^2) = \frac{1}{4} \cdot (t + 1)^2$.
Rechts ist -1 *doppelte Nullstelle*, daher muss links $p_2 \cdot (-1) + p_1 = 0$ und $q_2 \cdot (-1) + q_1 = 0$ sein, damit ist $p_1 = p_2$ und $q_1 = q_2$.
Analoges gilt auch für zwei Würfel.

Literatur

[1] Stefan Götz: Eine mögliche Verbindung von Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung im Mathematikunterricht und ein alternativer Zugang zur Poisson-Verteilung mit Hilfe eines Paradoxons. In: DdM **21** (1993), Heft 3, S. 182–206.

[2] Stefan Götz: Ziegen, Autos und Bayes — eine never-ending story. In: Stochastik in der Schule Band **26** (2006), Heft 1, S. 10–15.

[3] Stefan Götz: Würfel und Augensummen — ein unmögliches Paar. In: Teaching Mathematics and Computer Science **4/1** (2006), S. 71–88.

[4] Paul Halmos: Problems for Mathematicians, Young and Old. The Dolciani Mathematical Expositions (Number Twelve), published by The Mathematical Association of America 1991.

[5] Peter Raith: Proseminar zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für LAK. Universität Wien, Sommersemester 2004.