Wilhelm STERNEMANN, Lüdinghausen

Elementare Inhalte zu nichtlinearen Iterationen

In diesem kurzen Beitrag (teilw. ausführlicher in [3]) werden zu den Iterationen Tätigkeiten und Lerninhalte im Unterricht aufgelistet und einige Bezüge zu den etablierten Inhhalten des MU angedeutet. Sie sind nach vier verschiedenen Anforderungsstufen beim Arbeiten mit dynamischen Systemen geordnet. Der Blick wird auf komplexes Verhalten in nichtlinearen dynamischen Systemen gelenkt werden, als Ergänzung des systemdynamischen Denkens im Sinne von vernetztem Denken.

Die Begriffshierarchie zu Systemen lautet kurz zusammengefasst:

1. Zustand, 2. Prozess, 3. System, 4. Sich änderndes System.

Zustände und Zustandsräume bilden die Basis. Ein Prozess ist eine Folge von Zuständen. Ein System entsteht durch freie Wahl des Startwertes, ist also eine durch den Parameter Startwert parametrisierte Prozessschar. Zur Systemdynamik gehört auch der Prozess der Änderung eines ganzen Systems meist über einen reellen Parameter (Bifurkationen).

Zum Vergleich die entsprechende Stufung bei Funktionen, wobei die 4. Stufe beim Unterricht mit Funktionen kaum vorkommt:

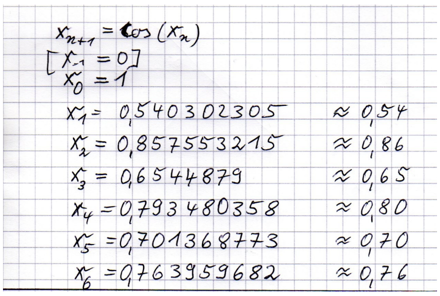
1. Zahl, 2. Funktion, 3. Funktionenschar, 4. Sich ändernde Funktionenschar.

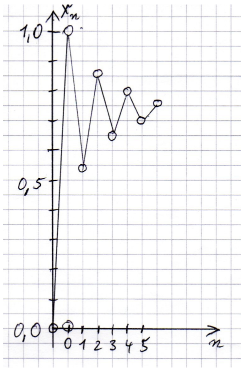
1. Iterationen ausführen - Zustände erzeugen, sehen und darstellen

Grundaufgabe: Bestimme $x_1, x_2, \ldots x_6$. *Startwert* $x_0 = 1$ *und* $x_{n+1} = \cos(x_n)$

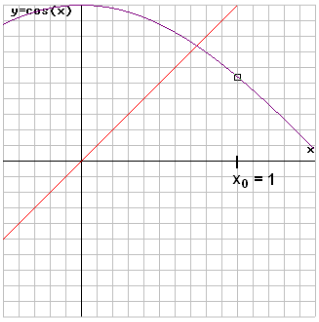
Diese unterste Stufe ist als Basis aller Systemdynamik auch wichtig. Für wirkliches systemdynamisches Denken muss man die Zustände erzeugen und darstellen können, um mit dem Zustandsraum vertraut zu werden. (eindimensional wie mehrdimensional).

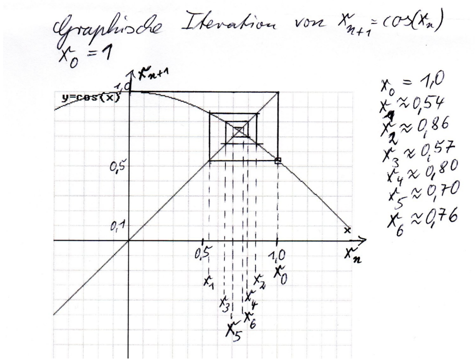
Ein besonders einfacher Weg wäre das wiederholte Tippen auf eine TR-Taste („Mathematik zum Anfassen“) mit Beobachtung und geeigneter Dokumentation der Display-Anzeige. Bei den heutigen gängigen Taschenrechnern kann jeder Term mit der Variablen „Ans“ (=Anzeige) eingegeben und wirklich so einfach iteriert werden. Da wird die Handhabung von Heronverfahren in der Jgst. 9 und Newtoniteration in der Sek.2 zum Kinderspiel. Das Ergebnis könnte zum Beispiel wie in der Abbildung 1 aussehen.





Ausführung mit dem Taschen-rechner





Ausführung einer Grafischen Iteration

Auch mathematisch untalentierte Schüler können hierbei mathematisch profitieren. Eine solche Zahlenfolge entsteht mit rekursivem Denken unter Benutzung des Vorgängers. Ein solches Folgendenken wird häufiger in Intelligenztests gefördert als im MU. Eine so entstehende Iterationstabelle ist gedanklich orthogonal zu den dominierenden Funktionstabellen orientiert und wäre eine echte Erweiterung. Man braucht beides.

Als etablierten mathematischen Inhalt wird der Funktionsbegriff selbst gefestigt. Eine Funktion als deutlicher Term-Operator erfahren. Auch in der grafische Iteration wird die Rolle von Funktionswert und Argument vertieft, sogar rein qualitativ, ohne Zahlen. In der elementaren Form der Rückkopplung wird der Algorithmusbegriff gefördert.

2. Prozessverstehen

Grundaufgabe: Beschreibe und erkläre das kurzfristige und das Langzeitverhalten der Iteration.
Mit der 2. Stufe beginnt wirkliches dynamisches Denken. Der Schüler „betrachtet“ Prozesse als Zahlenfolgen aus mehr Distanz lernt eine Phänomenologie von Verhaltensmustern kennen.
Diese Tätigkeit kann man in mehrere Aktivitäten gliedern:
1. Beobachten - Die ersten Schritte der Iteration betrachten und Muster

oder qualitative Strukturen erkennen. *2. Beschreiben* - Die erkannten Strukturen verbalisieren mit einer Handvoll bekannter aber auch weniger bekannter Begriffen (*monoton, alternierend, unregelmäßig, wachsend, sinkend, konstant, periodisch,* ...) 3.Nah-Vorhersage für die nächsten Iterationsschritte verbalisieren oder Werte schätzen und experimentell mit dem Computer bestätigen. *4. Ein Langzeitverhalten vermuten und beschreiben*, wobei man durchaus an nicht endende unendlich lange Iterationen denkt. (*Fixpunkt, n-zyklisch, chaotisch, anziehend bzw. stabil, abstoßend bzw. instabil, beschränkt, unbeschränkt,* ...) Viele der Kurzzeitverhaltensmuster bkommen jetzt neue Akzente. Vermutungen durch experimentelle Mathematik testen oder verwerfen. *5. Die Beobachtungen mathematisch erk*lären und die Vermutungen mathematisch qualitativ begründen und mathematisch strengen beweisen (z.B. Stabilität eines n-Zyklus über die Ableitung im entspr. Fixpunkt der n-Iterierten Funktion) (auch unabhängig vom Experiment)
Es gibt sicherlich zusätzlichen mathematischen Bildungswert beim mathematischen Experimentieren. Die experimentellen Entdeckungsmethoden wie in der Physik haben im Mathematikunterricht heute, mit selbständig arbeitenden Schülern einen besonderen Stellenwert.

Die selbstverständlich und unentbehrliche Computernutzung mit Excel, DERIVE bringt Medienkompetenz, ohne dass man künstlich nach computergeeigneten Aufgaben suchen muss. Die Rundungsproblematik beim TR und Computer wird besonders drastisch Erfahren (Sensitivität beim Chaos oder auch beim scheinbaren „Einrasten“ im Fixpunkt bzw. im Zyklus)

3. Systemdynamik

Grundaufgabe: Beschreibe und erkläre die verschiedenen Langzeitverhalten der Iteration in Abhängigkeit vom Startwert.

Das wirkliche systemdynamische Denken entsteht, wenn der Startwert variiert wird. Zu trennen vom sog. systemischen vernetzten Denken in dynamischen Systemen. Man hat zu einer Iterationsfunktion beliebig viel Prozesse nebeneinander. Jeder Startwert hat sein Langzeitverhalten. Umgekehrt hat jedes Langzeitverhalten seine Menge von Startwerten, die oft eine überraschende geometrische Figur bildet. Ein Auswahl einzelner Stichworte:

1. Einzugsgebiet eines stabilen Fixpunktes, Zyklusses, Chaosbereichs.

2. Attraktoren: stabile unentrinnbare Bereiche („Gefängnisse“ z.B. Fixpunkte, Zyklen, Chaosbereiche) auch vergleichbar mit Konvergenzbereichen von Potenzreihen.

3. Fraktale: Die Einzugsgebiete haben bei nichtlinearen Systemen häufig eine komplizierte geometrische Struktur

Für das mathematische Verständnis von Computern tritt noch einmal die Rundungsproblematik bei den Grenzen des Zoomens bei Fraktalen eindrucksvoll in Erscheinung. In der heutigen Computerzeit ist die Endlichkeit der Computer ein wichtiger Teil der mathematischen Erziehung.

4. Systemänderungen

Grundaufgabe: Beschreibe und erkläre die im (Feigenbaum-)Diagramm die zu sehenden verschiedenen Langzeitverhalten und auch die (Bifurkations-)Stellen, wo sich das Langzeitverhalten des Systems qualitativ ändert?

Die höchste Stufe in der Systemdynamik bringt tieferes Verständnis für die Systeme unserer Welt. Das ganze System ändert sich mit der Zeit und die sich ändernden Langzeitverhalten werden gezeichnet. Eine Auswahl von Stichworten:

1. Bifurkationen = singuläre Punkte des *Systemparameters, wo sich das Langzeitverhalten qualitativ verändert. 2.* Katastrophen = Umkippen von Stabilität in Chaos als besondere Bifurkation. *3. Gabelbifurkation* und ihre Kaskaden mit Periodenverdopplung, Feigenbaumkonstante. 4. Intermittenz: Die Iteration ist in einem Kasten nur fast gefangen und findet immer wieder raus. *5. Koexistierende Attraktoren* Je nach Startwert erhält man völlig verschiedene Feigenbaumdiagramme. *6. Die sog. Ordnungsfenster* mit Berechnung des superstabilen Zyklusses darin: Auch hier erfährt der Schüler neue Grenzen des Rechnens. Durch die Möglichkeiten mit DERIVE erfährt der Schüler, dass mathematischen Formeln so komplex werden können, dass sie nutzlos und auch sinnlos sind.

Literatur

[1] Heinz-Otto Peitgen u.a.: Bausteine des Chaos Fraktale: Springer Klett-Cotta Berlin 1992

[2] Heinz-Otto Peitgen u.a.: Chaos Bausteine der Ordnung: Fraktale, Springer Klett-Cotta Berlin 1992

[3] Wilhelm Sternemann: Nichtlineare Iterationen und Fraktale, die Computerkinder. In: Hans Georg Weigand & Thomas Weth (Hrsg): Computerwekzeuge und Prüfungen Franzbecker, Berlin 2007(in Kürze)