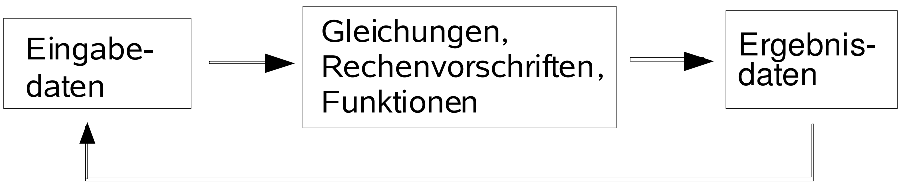
Reimund ALBERS, Bremen

Iteration an linearen Funktionen

Üben - Festigen - Wiederholen sind wichtige Phasen im Lernprozess. Eine Schwierigkeit dabei ist, diese so zu gestalten, dass sie nicht monoton und langweilig sind. Der Themenkreis „Dynamische Systeme“ bietet dazu vielfältige Möglichkeiten, gerade solche Phasen interessant und vielseitig zu gestalten. Ich möchte hier eine Übungssequenz vorgestellt, die ursprünglich als Material zur Chaosmathematik entstanden ist. Man kann sie sehr gut einsetzen, wenn man lineare Funktionen behandelt hat. (Das kann in der Mittelstufe geschehen oder auch zu Beginn der Oberstufe, wenn zentrale Dinge der Mittelstufe wiederholt werden sollen.) Das Thema ist ein kleines, fest umrissenes Versuchsfeld, in dem man ein wenig spielen (üben) kann, plötzlich aber neue Strukturen entdeckt und sich selbst mathematische Fragen stellen kann (, die manchmal gar nicht alle (sofort) beantworten werden können). Und bei allem werden die SchülerInnen zur Bruchrechnung verführt, schnöde Kommazahlen erweisen sich als unbrauchbar und stehen dem Forschungsprozess nur im Wege.

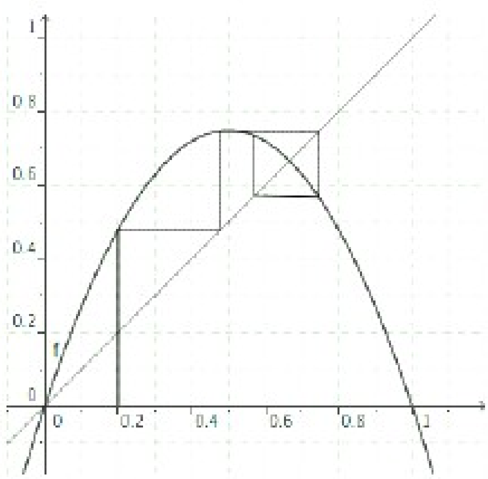
1. Die Iteration



Unter einer Iteration versteht man einen (Rechen-)Vorgang, in dem aus Eingabedaten neue Ergebnisdaten ermittelt werden. Diese Ergebnisdaten werden dann für einen weiteren Schritt als Eingabedaten rückgekoppelt. Die rekursiv definierten Zahlenfolgen sind das bekannteste Beispiel für dieses Prinzip. Für den Gebrauch in der Schule schrumpfen Eingabe- und Ergebnisdaten zu je einer Zahl, die Rechenvorschriften zu einer Funktion.

2. Grafische Iteration

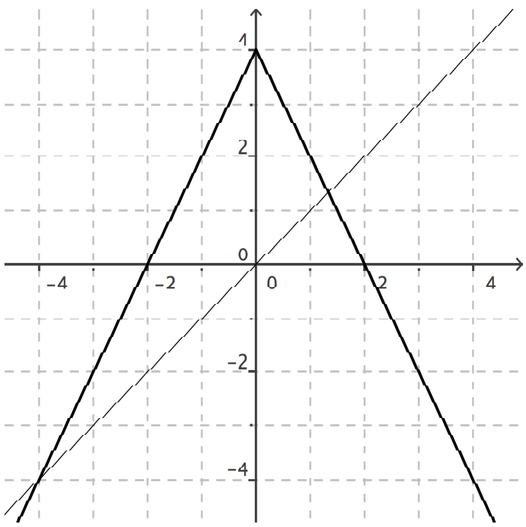
Neben dem rein rechnerischen Auswerten der Iteration, d.h. letztlich dem Bestimmen der ersten Elemente der Zahlenfolge, bietet sich die grafische Iteration als zweiter Zugang an - ganz im Sinne der Betonung der drei Arbeitsweisen mit Funktionen: numerisch, symbolisch und grafisch. Dazu zeichnet man sich neben dem Funktionsgraf die Hilfslinie $y = x$ und zeichnet den Pfad nach der Merkregel: senkrecht zum Funktionsgraf, waagerecht zur Hilfslinie.



Der Iterationspfad, den man beispielsweise für die Funktion $f(x) = 3.3\xi(1-\xi)$ erhält, wenn man mit $x_0 = 0{,}2$ startet.

3. Abschnittsweise, lineare Funktionen

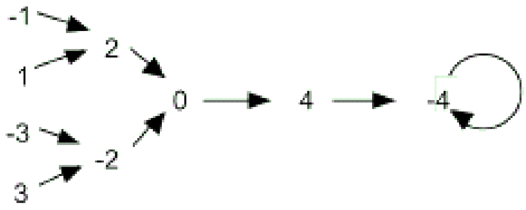
Diese Modifikation festigt den Funktionsbegriff (Definitions-, Wertemenge, eindeutige Zuordnung) und eröffnet neue Möglichkeiten für die Iteration. Ich möchte hier nicht alle Varianten besprechen, sondern mich auf ein interessantestes Beispiel konzentrieren: $f(x) = \begin{matrix} 2\xi+4 & \phi\rho\ \xi<0 \\ -2\xi+4 & \phi\rho\ \xi\quad 0 \end{matrix}$



Der Funktionsgraph für f (dicke Linie) zusammen mit der Linie $y = x$ für die grafische Iteration

4. Erste Iterationsexperimente mit ganzen Zahlen

Diese „Zelt“- oder „Dach“-Funktion ist eher in der Form gebräuchlich, dass sie über dem Einheitsintervall [0 ; 1] liegt. Die hier vorliegende „Vergrößerung“ ermöglicht es, die ersten interessanten Iterationsexperimente grafisch oder rechnerisch mit ganzen Zahlen zu starten. Dabei erkennt man, dass Startwerte außerhalb von [-4 ; +4] zu Iterationen führen, die gegen $-$ laufen. Daher schränken wir die nachfolgenden Betrachtungen auf dieses interessante Intervall ein. Alle Iterationen von ganzzahligen Startwerten laufen dann auf den Fixpunkt -4.

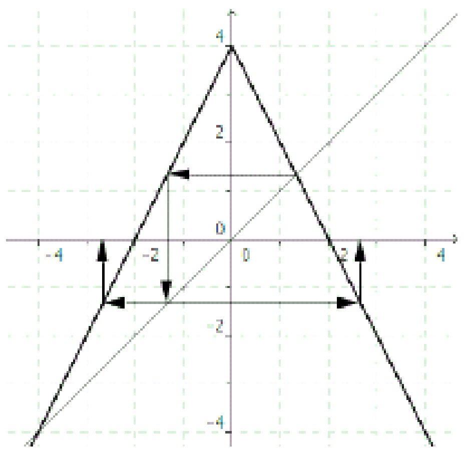


Baumdiagramm zu den Iterationen, die mit ganzen Zahlen im Intervall [-4 ; +4] starten.

Es folgt nun eine für die nächsten Betrachtungen ganz zentrale Frage: Gibt es außer den ganzen Zahlen im interessanten Intervall weitere Startzahlen für Iterationen, die letztlich bei -4 enden? Es sind alle Halben. Denn jede Zahl wird beim Bilden des Funktionswertes mit 2 multipliziert und so werden aus Halben nach einem Schritt Ganze. Dann ist es aber auch klar, dass ebenfalls alle Viertel, Achtel, Sechzehntel u.s.w. letztlich durch die Iteration nach -4 gelangen. Das Einzugsgebiet für den Fixpunkt -4 liegt dicht im interessanten Intervall.

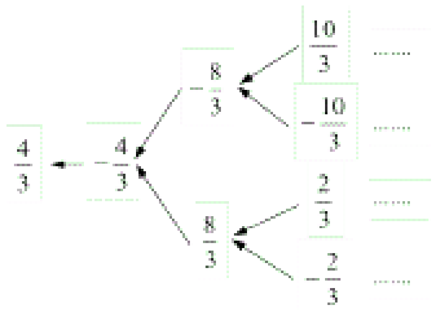
5. Der zweite Fixpunkt

Nachdem man einen Fixpunkt untersucht hat, ist es nahe liegend, sich auf den zweiten zu konzentrieren. Welche Startwerte führen auf diesen Fixpunkt? Diese Frage beantwortet man am sichersten, wenn man den Iterationsprozess umkehrt. Dieses führt auf das Rückwärtsiterieren, was erst einmal vorsichtig erprobt sein will, denn zu jedem Punkt gibt es zwei Urbilder.



Die grafische Rückwärtsiteration vom zweiten Fixpunkt macht deutlich, wie die Startwerte rechnerisch gesucht werden können.

Für die rechnerische Lösung muss man zunächst den Fixpunkt $\frac{4}{3}/\frac{4}{3}$ berechnen und dann die Gleichung $2x+4=\frac{4}{3}$ lösen. Die weiteren Untersuchungen lassen sich wieder übersichtlich grafisch zusammenfassen.



Baumdiagramm zu den Iterationen, die auf den Fixpunkt $\frac{4}{3}/\frac{4}{3}$ führen. Offensichtlich sind das alle Drittel aus dem interessanten Intervall.

Entsprechend der oben genannten Überlegung starten dann auch alle Sechstel, Zwölftel, Vierundzwanzigstel, ... Iterationen, die auf $\frac{4}{3}$ führen.

6. Ausblick

Eine systematische Fortsetzung der Untersuchung führt zu Fünfteln und Zyklen im Iterationsablauf.

Die ursprüngliche Absicht für diese Einheit war das Wiederholen und Festigen bekannter Inhalte. Der Motor für das Voranschreiten wurde mehr und mehr die mathematische Neugier. Eine Antwort legt häufig die nächste Frage nahe. Dabei werden verschiedenste Gebiete berührt: lineare und abschnittsweise definierte Funktionen, Brüche, Aufstellen und Lösen von Gleichungen.

Literatur

[1] Albers, R., Iteration mit linearen Funktionen,
`http://www.mevis.de/~albers/Materialien/index.html`

[2] Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T., Yunker, L., Fraktale: Selbstähnlichkeit, Chaosspiel, Dimension; ein Arbeitsbuch, Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1992

[3] Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D., Maletsky, E., Perciante, T., Yunker, L., Chaos: Iteration, Sensitivität, Mandelbrot-Menge; ein Arbeitsbuch, Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1992