Christoph PÖPPE, Heidelberg

Platonische Fraktale – selbstgebastelt

Ein dreidimensionales Fraktal ist, wie jeder dreidimensionale Gegenstand, zum Anfassen – im Prinzip. In der Praxis stößt das Vorhaben, beispielsweise ein Sierpinski-Tetraeder mit Volumen 0, endlicher Oberfläche und unendlicher Kantenlänge herzustellen, auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Als Ersatz empfiehlt sich eine Näherung durch eine der Iterationsfiguren, deren Grenzfigur das echte Fraktal ist. Man muss sich allerdings mit relativ frühen Iterationen begnügen: Beim fraktalen Ikosaeder [1] besteht die n-te Iteration aus 12^n einzelnen Ikosaedern. Für n = 0, 1 und 2 haben Wilhelm Sternemanns fleißige Schülerinnen das noch realisiert. Aber 12^3 = 1728 Ikosaeder zusammenzubauen erschien doch als ziemlich wahnwitzige Idee.

Da ich schon zahlreiche Karton-Bausätze für geometrische Körper selbst entworfen hatte [2], fuhr ich auf die wahnwitzige Idee ab. Längere Vorbereitungen mündeten in dem mittlerweile legendären Geometriewochenende vom Januar 2001 an der Universität München [3]. 150 Leute haben in geduldiger Arbeit die immerhin 25920 sichtbaren Dreiecke (von den zwanzig Dreiecken jedes Ikosaeders müssen, fünf, da unsichtbar, nicht ausgeführt werden) an die richtige Stelle gesetzt (Abb. 1). Unser Werk wanderte in das wenig später gegründete Mathematik-Museum „Mathematikum" von Albrecht Beutelspacher in Gießen und ist dort, trotz unübersehbarer Alterserscheinungen, noch immer eine Attraktion für das Publikum.

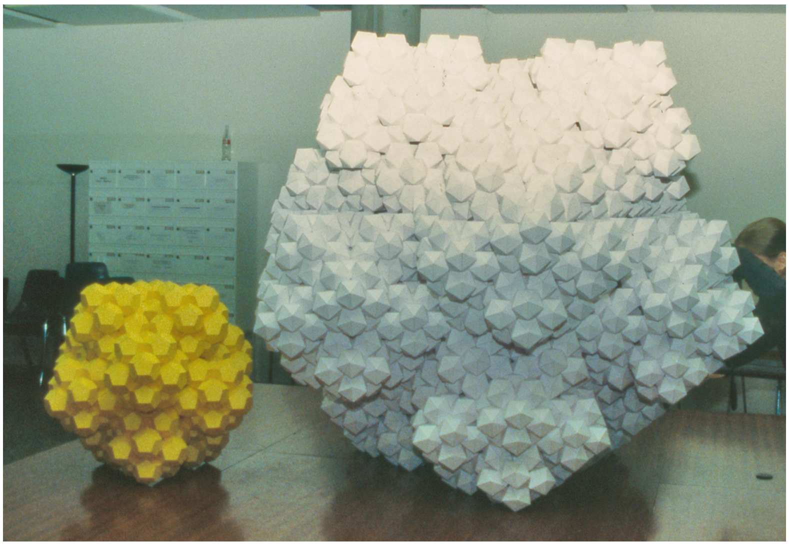

Abb. 1: Das fraktale Ikosaeder (dritte Iterationsstufe) unmittelbar nach seiner Fertigstellung im Januar 2001 an der Universität München. Das kleinere gelbe Gebilde daneben ist Werbecks fraktales Dodekaeder (zweite Iterationsstufe).

Als Pausenfüller für die Leute, die beim Zusammenbau des großen Werks nicht beschäftigt werden konnten, haben wir ein fraktales Dodekaeder (genauer: dessen zweite Iteration) nach einem Rezept von Stephan Werbeck gebaut: Man setzt die kleinen Dodekaeder nicht in die Ecken des großen, sondern in dessen Flächenmitten.

Der Erfolg von München motivierte zum Weitermachen. Das nächste Großprojekt aus Karton war das Sierpinski-Tetraeder. Anders als beim fraktalen Ikosaeder treffen sich hier die kleinsten Polyeder nicht entlang einer Kante, sondern nur in einem Punkt, was den Zusammenhalt schwierig macht. Kleine Pyramidchen (halbe Oktaeder) der Kantenlänge 1 cm, zwischen je zwei Tetraeder eingepasst und schwarz bedruckt, fallen kaum auf und geben dem Gesamtgebilde eine erstaunliche Stabilität (Abb. 2).

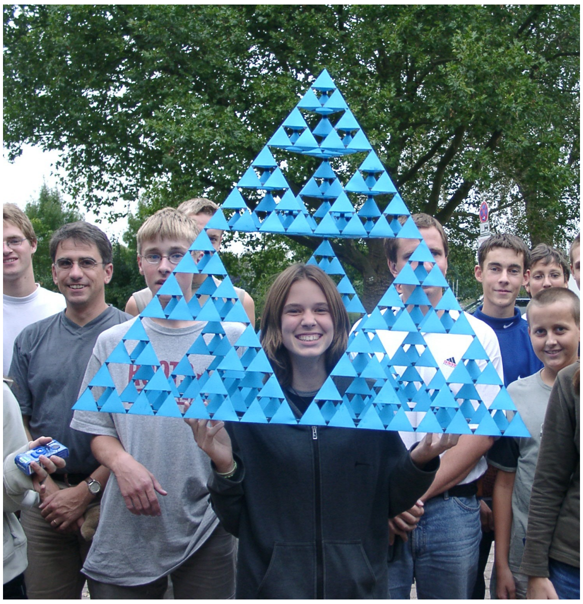

Abb. 2: Dieses Sierpinski-Tetraeder aus Karton haben die Gewinner des Wettbewerbs „Känguru der Mathematik“ im September 2002 in Münster (Westfalen) gemeinsam zusammengebaut.

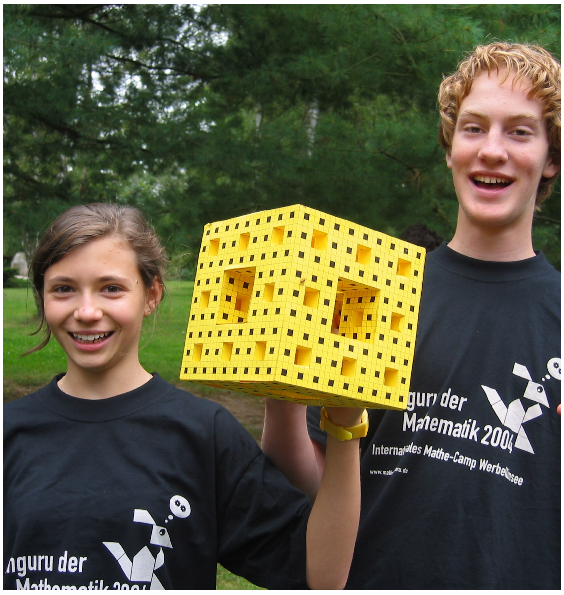

Abb. 3: Zweite Iterationsstufe des Mengerschwamms, verfertigt von den Gewinnern des Wettbewerbs „Känguru der Mathematik“ im August 2004 am Werbellinsee.

Bei dem nächsten Projekt, dem Mengerschwamm, bekamen wir dessen deutlich größere fraktale Dimension sehr handgreiflich zu spüren. Bei jeder Iteration verzwanzigfacht sich die Anzahl der Würfel. Mein Bausatz liefert unter Weglassung der zahlreichen unsichtbaren Teilflächen und Zusammenfassung vieler in einer Ebene liegender Flächen einen Mengerschwamm der zweiten Stufe mit 400 kleinen Würfeln; eine dritte Iterationsstufe wird durch aufgedruckte schwarze Quadratchen (anstelle der Löcher) angedeutet (Abb. 3). Aber die Gesamtgröße bleibt mit einer Kantenlänge von 18 cm

(Kantenlänge der kleinen Würfel 2 cm) eher wenig eindrucksvoll. Auch die nächste Iteration, für die wir zwanzig Exemplare dieses Kartonbauwerks hätten verfertigen müssen, wäre nur bescheidene 54 cm lang geworden. Da macht ein Sierpinski-Tetraeder bei gleichem Aufwand wesentlich mehr her.

Auch für das (nach Sternemanns Originalrezept gebaute) fraktale Dodekaeder sind nach zwei Iterationen schon 400 Stück erreicht, die sich allerdings wegen der relativ geringen fraktalen Dimension auf ein erheblich größeres Volumen verteilen. Zugleich ist das Kartongebilde wegen seiner „Luftigkeit“ nicht besonders stabil und droht durchzuhängen. Für das Bauprojekt von Ende November 2005 an Sternemanns Schule, dem Gymnasium Canisianum in Lüdinghausen (Westfalen), haben wir das Kartonbauwerk durch ein Gerippe aus Dreikanthölzern stabilisiert. Die Hölzer liegen auf den Kanten eines Ikosaeders und stecken dort, wo sie sich treffen, nämlich jeweils zu fünft an den Ecken des Ikosaeders, in blechernen Schuhen.

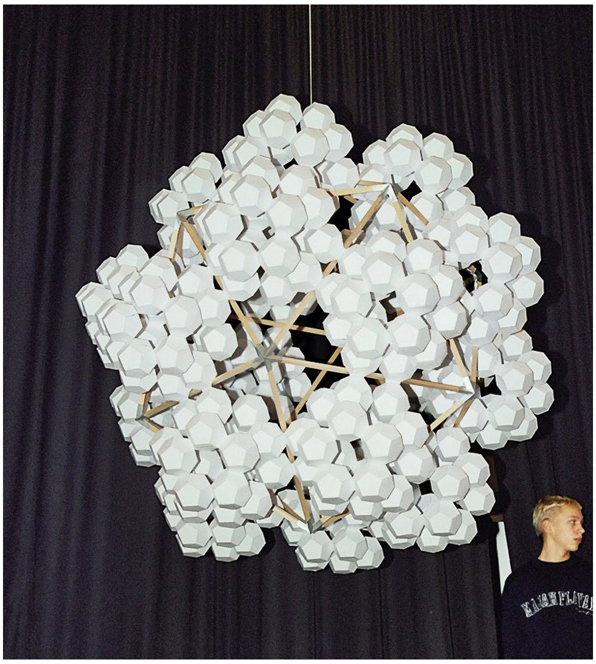

Abb. 4: Das fraktale Dodekaeder der zweiten Stufe, hängend in der Aula des Gymnasium Canisianum in Lüdinghausen

Weitere geometrische Großprojekte, die ich in einem Leistungskurs einer 13. Klasse in Darmstadt sowie zu mehreren Gelegenheiten beim hessischen „Tag der Mathematik“ durchgeführt habe, realisierten

• Raumfüllungen durch Oktaederstümpfe und Rhombendodekaeder sowie den Übergang zwischen beiden nach Artur Schoenflies,

• „unendliche Polyeder“ (natürlich nur endliche Ausschnitte davon) nach dem Rezept von Steven Dutch,

• die Projektion vierdimensionaler platonischer Körper in den dreidimensionalen Raum, insbesondere des 120-Zells aus 120 Dodekaedern.

Zu dem letzten Projekt haben wir 119 einzelne, durch die Projektion verzerrte Dodekaeder zusammengebaut, die sich auch sehr schön zum einhundertzwanzigsten, großen Dodekaeder zusammensetzen lassen, jedoch wenig Ruhm damit geerntet. An einem Kantenmodell, bei dem die Kanten als dreiseitige Prismen ausgeführt sind, arbeite ich noch. Die „Vorstudien“, nämlich Kantenmodelle für den vierdimensionalen Hyperwürfel und für das 24-Zell aus 24 Oktaedern, sind bereits abgeschlossen.

Es ist noch ein sehr ambitioniertes Projekt, mit zurzeit noch ungewissen Erfolgsaussichten, in der Planung: ein Sierpinski-Tetraeder aus $4^7 = 16384$ Stahlkugeln. Bei einem Kugeldurchmesser von 3 cm käme das Gesamtwerk auf eine Kantenlänge von 384 cm und ein Gesamtgewicht von etwa 1,6 Tonnen. 500 Leute müssten eigentlich ausreichen, um dieses Prachtstück aus geeignet durchbohrten Kugeln und dazu passenden Metallstiften an einem Tag zusammenzukleben. Eine computersimulierte Vorschau ist auf der Website http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/ngg/Sierpinski/index.php?L=E zu besichtigen.

Literatur

[1] Wilhelm Sternemann: ((auf dieser CD der vorstehende Beitrag))

[2] Christoph Pöppe: Kartonbausätze für geometrische Körper. http://www.poeppe-online.de

[3] Christoph Pöppe: Fraktal zum Anfassen. Spektrum der Wissenschaft 3/2001, S. 96

[4] Website von Stephan Werbeck: http://werbeck.num12.com/frame. html. Auf „Konstrukte II“ klicken! Die letzten vier Bilder sind aufeinander folgende Iterationsstufen des im Text genannten Werbeck'schen Dodekaeders.