Gabriella AMBRUS, Budapest

Weiterdenken und Verallgemeinerungsmöglichkeiten eines Problems für Klassen 7-11

Suche nach Verallgemeinerungsmöglichkeiten im Fall von Problemen ist gar nicht selten. Es ist aber nicht üblich diese anhand der verschiedenen Vorkenntnisse in verschiedenen Jahrgängen zu betrachten. Diese Art der Bearbeitung eines Problems erlaubt das Üben und die Vernetzung von zahlreichen mathematischen Kenntnissen und Tätigkeiten. Im Vortrag wird diese Problembehandlung an einem geometrischen Beispiel gezeigt:

Der Mittelpunkt eines Quadrats mit der Seitenlänge 2cm sei ein Eckpunkt eines anderen Quadrats mit der gleichen Seitenlänge.

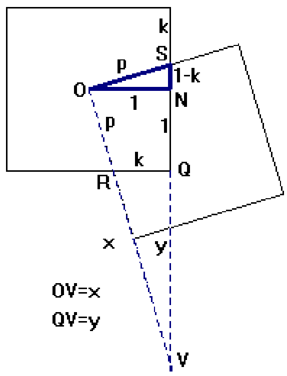
Wie groß ist der gemeinsame Teil beider Quadrate?

1. Über möglichen Lösungen

Verschiedene Lösungswege nach verschiedenen Jahrgängen habe ich schon in meinem Vortrag in 2006 zu diesem Problem gezeigt, hier zitiere ich kurz eine Lösung mit Hilfe der Ähnlichkeit, die inzwischen „entstanden" ist.

<u>Lösung mit Ähnlichkeit</u>

Der gemeinsame Teil wird als Differenz von den rechtwinkligen Dreiecken OSV und QRV bestimmt. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecken QRV und OSV folgt, dass



$$\frac{x-p}{y+2-k}=\frac{k}{p} \quad (1) \qquad\qquad \frac{y}{x}=\frac{k}{p} \quad (2)$$

so folgt dass

$$x=\frac{2kp+p^3-k^2p}{p^2-k^2} \quad \text{und} \quad y=\frac{kp^2-k^3+2k^2}{p^2-k^2}$$

Der gemeinsameTeil: $T=\frac{px}{2}-\frac{ky}{2}=\frac{p^2-(k-1)^2+1}{2}$

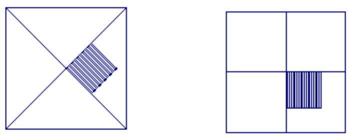
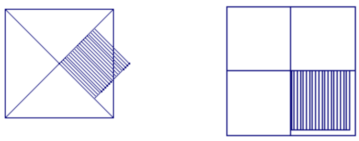
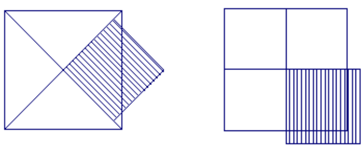
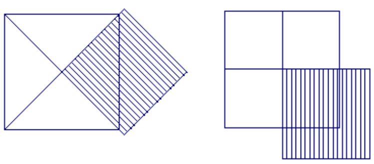
Aus dem markierten Dreieck $p^2-(k-1)^2=1$ und damit $T=1$

Vorkenntnisse, Stufe: Ähnlichkeit von Dreiecken, Flächeninhalt von rechtwinkligen Dreiecken, Pythagoras, algebraisches Umformen. 15 - 16 Jahre (9., 10. Jahrgang)

2. Weiterdenken, Verallgemeinerung

2.1 Klassifizierung der Fälle

Wenn die Seitenlänge des zweiten Quadrates größer als 2 cm ist, so bleibt der gemeinsame Teil 1 cm^2. Wenn die Seitenlänge des zweiten Quadrates kleiner als 2 cm ist, können folgende verschiedene Fälle auftreten:

	1. Das zweite Quadrat bleibt beim Drehen immer im ersten Quadrat; in diesem Fall ist der gemeinsame Teil die Fläche des zweiten Quadrates.
	2. Ein Teil des zweiten Quadrates ist beim Drehen manchmal außerhalb des ersten Quadrates, in diesem Fall hängt die Größe des gemeinsamen Teils von der Lage der Quadrate ab.
	3. Ein Teil des zweiten Quadrates ist beim Drehen immer außerhalb des ersten Quadrates, die Größe des gemeinsamen Teils ist von der Lage der Quadrate abhängig.
	4. Ein Teil des zweiten Quadrates ist immer außerhalb des ersten Quadrates, die Größe des gemeinsamen Teils ist aber immer ein Viertel des ersten Quadrates.

Vorkenntnisse, Stufe: Erfahrungen über Klassifikationen von Objekten, oder Fällen. 11-12 Jahre (6.-7. Jahrgang).

Diese Ergebnisse können in weiteren Jahrgängen präzisiert und ergänzt werden.Wenn die Parameter a und b für die Seitenlänge des ersten bzw. des zweiten Quadrates eingeführt sind, können die erwähnten Fällen in vier Klassen eingeordnet werden:

$0 < b \leq \frac{a}{2\sqrt{2}}$	Der gemeinsame Teil ist konstant während der Drehung und gleich mit dem zweiten Quadrat.
$\frac{a}{2\sqrt{2}} < b < \frac{a}{2}$	Der gemeinsame Teil ändert sich während der Drehung bis zum zweiten Quadrat.
$\frac{a}{2} \leq b < \frac{a\sqrt{2}}{2}$	Der gemeinsame Teil ändert sich während der Drehung bis zum Viertel des ersten Quadrates.
$\frac{a\sqrt{2}}{2} \leq b$	Der gemeinsame Teil ist konstant während der Drehung und gleich mit dem Viertel des ersten Quadrates.

Vorkenntnisse, Stufe: Pythagoras, algebraisches Umformen. 15-16 Jahre (9. -10. Jahrgang)

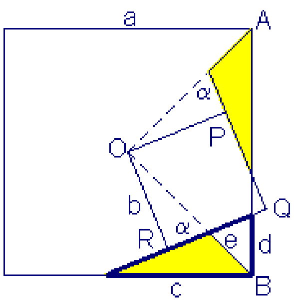
Für jeden Parameterwert der größte (bei dem ersten und vierten Fällen sogar die kleinste) überlappende Teil angegeben ist, ergibt sich daher die Frage nach dem kleinsten überlappenden Teil bei

$$\frac{a}{2\sqrt{2}} < b < \frac{a}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad \text{bei } \frac{a}{2} \le b < \frac{a\sqrt{2}}{2} .$$

Aus den beiden Fällen werde ich den ersten, einfacheren Fall betrachten, wobei die Größe der überlappenden Fläche als Funktion der Position für $\frac{a}{2\sqrt{2}} < b < \frac{a}{2}$ untersucht wird.

2.2 Suche nach dem kleinsten überlappenden Teil

Zum Aufschreiben des überlappenden Flächeninhaltes brauchen wir eine geeignete Variable, (hier *Schnittwinkel* α der Diagonale des stehenden Quadrates OB mit der Seite des gedrehten Quadrates RQ).



Q liegt außerhalb des stehenden Quadrates genau dann, wenn $\sin\alpha \cdot b\sqrt{2} > \frac{a}{2}$ gilt. (1)

Folglich untersuchen wir den Flächeninhalt für

$$\alpha \in \left[\alpha_0 = \arcsin\frac{a}{2\sqrt{2}b} \; ; 90°\right]. \qquad (2)$$

Um den Flächeninhalt des gemeinsamen Teils zu bestimmen, muss (wegen der Zerlegungsgleichheit) aus dem Viertel des ersten Quadrates das mit dicker Linie markierte Dreieck weggelassen werden.
Der Flächeninhalt des bezeichneten Dreiecks

$$F_0 = \frac{cd}{2} = \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\alpha - b\right)^2}{2\sin^2\alpha - 1}$$ .Und damit: $$F(\alpha) = \frac{1}{4}a^2 - F_0(\alpha) .$$

Die Funktion $F(\alpha)$ ist genau dann minimal, wenn $F_0(\alpha)$ maximal ist.

Untersuchung von $F_0(\alpha)$

a) Um das Maximum von $F_0(\alpha)$ zu bestimmen, betrachten wir die Ableitung nach α:

$$F_0'(\alpha) = -\frac{(a\sin\alpha - b\sqrt{2})\cdot\cos\alpha\cdot(a - 2\sin\alpha\cdot b\sqrt{2})}{\cos^2 2\alpha}$$, oder

b) Es wird angenommen zum Beispiel nach Experimentieren mit einem Modell oder mit einem geeigneten CABRI-Figur, dass $F_0(90°) \geq F_0(\alpha)$ gilt für die α Werte im Bereich. Das heißt, die zu beweisende Ungleichung:

$$\frac{(a\sin\alpha - b\sqrt{2})^2}{2\sin^2\alpha - 1} \leq \frac{(a-b\sqrt{2})^2}{1}$$

Vorkenntnisse: Winkelfunktionen, trigonometrische Funktionen und ihre Inversen, Sinussatz, trigonometrische Umformungen, algebraisches Umformen, und

bei a):Elemente der Differentialrechnung,

bei b):Lösung von parametrischen Ungleichungen, Zusammenhänge und Lösung von quadratischer Gleichung. Stufe: 17-18 Jahre (11. -12. Jahrgang)

3. Hilfsmitteln beim Lösen und Weiterdenken

Die Lösung des Problems ist gar nicht leicht. Für den ausgewählten Lösungsweg kann die Lehrperson in den verschiedenen Jahrgängen entscheiden, welche Hilfe für die SchülerInnen angeboten wird (eine Frage, ein Lösungssegment, ein Hilfsmittel).

Möglichkeiten für Hilfsmittel:

1. herkömmliche Modell

2. Untersuchung mit CABRI (dynamisches Geometrieprogramm)

Bei der Untersuchung der Funktionen F(α) bzw. $F_0(\alpha)$ können geeignete CABRI Figuren auch helfen, wobei der Wirkung der Änderung von Parameter a und b interaktiv gefolgt werden kann.

Die von mir angefertigte Datei ist im Internet unter der Adresse http://www.mathdid.inhun.com erreichbar.

3. Untersuchung mit grafikfähigem Taschenrechner

Der grafikfähige Taschenrechner erlaubt eine (didaktisch sehr bedeutende) Verknüpfung der verschiedenen Repräsentationen einer Funktion mit einer Variablen. Mit Grafikrechnern lässt sich die Zuordnungsregel der Funktion $F_0(\alpha)$ (als Berechnungsformel) symbolisch eingeben und die zusammengehörenden Werte werden in Tabellenform und/oder grafisch dargestellt.

Das Ziel der Untersuchung ist die Minimumstelle von $F_0(\alpha)$ bei konkreten Parameterwerten von a und b zu bestimmen.