Axel BRÜCKNER, Potsdam

Dynamische Geometriesoftware als Denk- und Kommunikationshilfe

Bildliche Darstellungen geometrischer Inhalte werden dazu genutzt, eine zu betrachtende Situation besser zu verstehen und Anstöße für das eigene Denken zu liefern. Im Unterricht dienen sie daneben (oder vielleicht hauptsächlich) der Weitergabe von Informationen über geistige Konstrukte und Prozesse. In vielen Fällen erfordern Denkanstöße nicht schlechthin die Betrachtung einer Situation, sondern auch deren Veränderung. Dass DGS hierfür in besonderer Weise geeignet sind, ist hinlänglich bekannt, s. z. B. [1] und [2].

1. Eine bekannte Konstruktionsaufgabe und eine berechtigte Frage

Die folgende Konstruktionsaufgabe ist durch einfaches kalkülmäßiges Konstruieren nicht zu lösen.

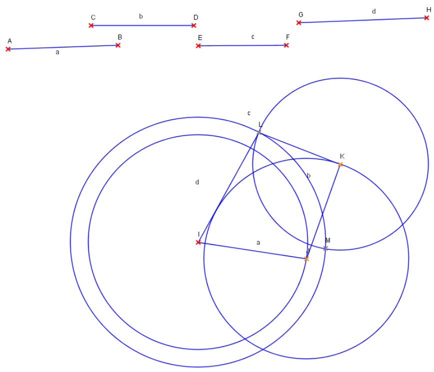
Konstruiere das Trapez A, B, C, D mit den parallelen Seiten a und c und den Seitenlängen a=8cm, b=6 cm, c=4cm, d=5cm.

Die Lösung verlangt, dass zunächst eine Hilfsfigur konstruiert wird. Davon ausgehend lässt sich dann das gewünschte Trapez zeichnen.

Für den kritischen Bearbeiter ergibt sich aus der Aufgabenstellung die Frage, ob es denn notwendig ist anzugeben, welche die beiden parallelen Seiten sind. Oder ist nicht durch die Angabe der Seitenlängen, die Reihenfolge der Seiten und die Forderung, dass es sich um ein Trapez handelt, die Figur bereits bestimmt?

Ein Überdenken des Problems (im Sinne von WAGENSCHEIN) führt schließlich zu folgenden Fragen: Kann man jedes Gelenkviereck (ein Viereck mit festen Seitenlängen, das in den Ecken beweglich ist) zu einem Trapez verformen? Entsteht dabei immer ein Trapez? Gibt es eventuell mehrere unterschiedliche Trapeze?

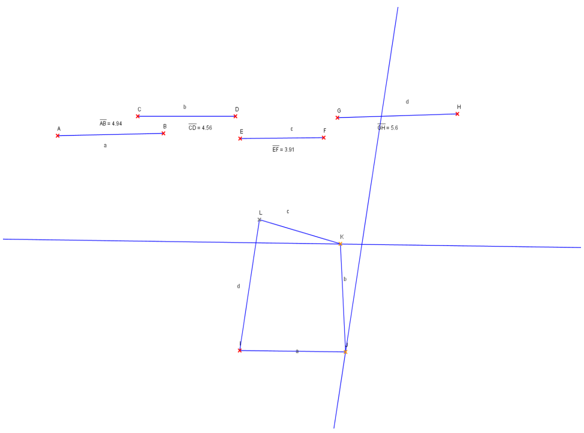
An dieser Stelle möchte man erst einmal probieren, was überhaupt passiert, wenn man ein Gelenkviereck in seiner Form verändert. Dafür eignen sich Modelle aus Holzleisten oder aus Stäben aus einem Konstruktionsbaukasten. Nachteilig ist bei der Verwendung solcher Materialien, dass die Seitenlängen nicht kontinuierlich verändert werden können und die Veränderung der Seitenlängen recht aufwändig ist. Eine DGS mit Zugmodus ist dafür viel leistungsfähiger und vor allem komfortabler. Allerdings muss der Bearbeiter erst einmal ein Gelenkviereck auf dem Bildschirm erzeugen. Dazu muss der Kreis als Ortslinie mit der gewünschten Eigenschaft bewusst genutzt werden.



Gelenkviereck

Die Seitenlänge können beliebig verändert werden, die Form der Figur lässt sich im Zugmodus variieren.

Für die experimentelle Untersuchung ist es günstig die Kreise „zu verstecken“. Außerdem kann man Parallelität für die Gegenseiten leichter feststellen, wenn jeweils eine Parallele einzeichnet und dann beobachtet wird, ob Koinzidenz eintritt.

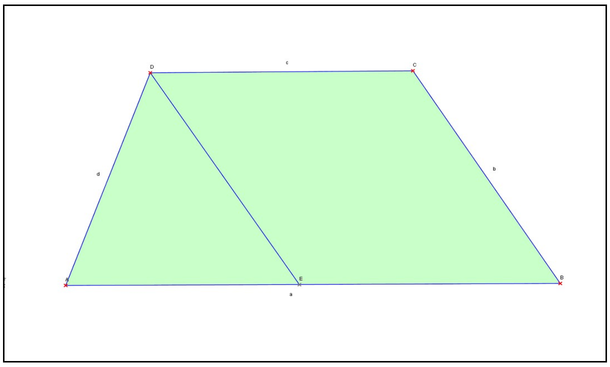


Gelenkviereck mit zwei Parallelen zur jeweiligen Gegenseite

Im Verlaufe des Experiments findet der Untersuchende heraus:

- Es gibt immer ein bestimmtes Paar paralleler Gegenseiten, Ausnahme Parallelogramm.
- Die Veränderung einer Seitenlänge kann dazu führen, dass plötzlich das andere Paar Gegenseiten parallel ist.
- Dazu reicht manchmal eine kleine Veränderung einer Seitenlänge aus.
- Nicht jede Veränderung einer Seitenlänge führt zum beschriebenen Wechsel.

Wie dieses Verhalten abhängt von den Längen der Seiten, lässt experimentell schwerlich feststellen. Man erinnere sich an die ursprünglich gestellte Frage, ob auf die Angabe, welches die Parallelen sind, verzichtet werden kann. Man müsste allein aus der Kenntnis der Seitenlängen entscheiden können, welches die parallelen Seiten sind. Wenn der eingeschlagene Weg nicht weiterführt, ist es vorteilhaft, die Herangehensweise völlig zu verändern. Nun weiß man, dass das Trapez eigentlich schon durch die zu konstruierende Hilfsfigur bestimmt ist.



Das Trapez mit der Hilfsfigur Dreieck aus den Seiten a-c, b, d

Das Dreieck ist konstruierbar, wenn seine Seitenlängen die Dreiecksungleichung erfüllen. Eine vollständige Fallunterscheidung führt zu der folgenden Übersicht.

$$a \| c\,,\quad a > c$$
$$Dreiecksungleichungen$$
$$b + c < a + d$$
$$c + d < a + b$$

$$b \| d\,,\quad b > d$$
$$Dreiecksungleichungen$$
$$a + d < b + c$$
$$c + d < a + b$$

$$a \| c\,,\quad c > a$$
$$Dreiecksungleichungen$$
$$a + b < c + d$$
$$a + d < b + c$$

$$b \| d\,,\quad d > b$$
$$Dreiecksungleichungen$$
$$a + b < c + d$$
$$b + c < a + d$$

In jedem der Fälle erscheint noch eine dritte Ungleichung, die jeweils zu einer „Vierecksungleichung“ führt.

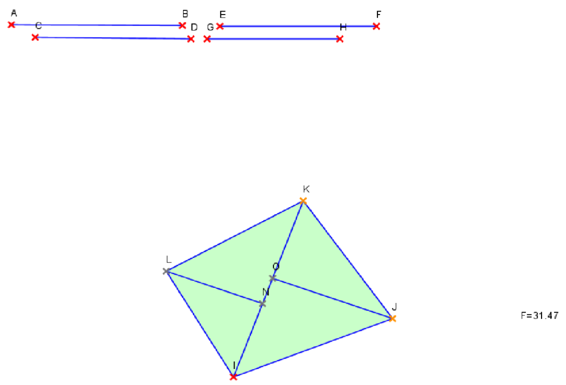
Die Zusammenhänge machen deutlich, dass man für die Feststellung, welche Gegenseitenpaare als Parallele in Frage kommen, die Summen der jeweils benachbarten Seiten vergleichen muss. Die Seite, die zweimal zur kleineren Summe gehört, ist die kürzere Parallele, die Seite die zweimal zur größeren Summe gehört, die längere. Die beiden anderen Seiten sind jeweils die Schenkel des Trapezes.

Der Fall, dass die Summen in beiden Fällen gleich sind, entspricht dem Parallelogramm. Die Hilfsfigur Dreieck entartet zu einer Strecke. Der Fall, dass die Summen in einem Fall gleich sind, lässt sich ebenfalls ausschließen.

2. Noch eine Frage zum Gelenkviereck

Die Formveränderung des Gelenkvierecks hat unterschiedliche Flächeninhalte der Figur zur Folge. Offensichtlich gibt es ein Viereck mit festgelegten Seitenlängen, das maximalen Flächeninhalt besitzt.

Es liegt auf der Hand, die Untersuchung wieder mit einer DGS vorzunehmen. Dabei wird neben dem Zug- auch der Messmodus genutzt. Ein Experiment, bei dem simultan mit der Formveränderung der Flächeninhalt der Figur berechnet werden kann, ist ohne DGS nicht möglich.



Flächeninhalt Gelenkviereck

Im Zugmodus wird die Form der Figur kontinuierlich verändert und dabei ihr Flächeninhalt beobachtet.

Die Beobachtungen und Untersuchungen an speziellen Vierecken, z. B. Rhombus, Parallelogramm und Drachenviereck, führen zu der Vermutung, dass das Sehnenviereck der Forderung gerecht wird. Um die Vermutung zu erhärten, kann der Kreis durch drei Eckpunkte des Vierecks gezeichnet werden. In der Veränderung erkennt man, dass das Viereck genau dann maximal wird, wenn auch der vierte Eckpunkt auf dem Kreis liegt.

Der Beweis der Vermutung lässt sich analytisch führen. Dazu werden Sätze der Trigonometrie und ein Additionstheorem benötigt.

Die Verallgemeinerung der Fragestellung auf Gelenkvielecke liegt auf der Hand. Man findet mit dem Hilfsmittel DGS schnell heraus, dass wiederum die Sehnenfigur maximalen Flächeninhalt besitzt. Die Überlegungen, die zur Erkenntnis führen, dass es für jedes Gelenkvieleck genau einen Umkreis gibt, lassen sich wiederum mit einem DGS initiieren und lenken.

Literatur

[1] Elschenbroich, H.-J. u. a. (Hrsg.): Zeichnung – Figur – Zugfigur. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin, 2001

[2] Weigand, H.-G.; Weth, Th.: Computer im Mathematikunterricht. Spektrum, Akad. Verlag, Heidelberg, Berlin, 2002,