Peter COLLIGNON, Erfurt

Didaktische Aspekte wirtschaftsmathematischer Ausbildung

Der Beitrag diskutiert die Verwendung der Differentialrechnung zur Modellierung ökonomischer Sachverhalte. Dabei werden die speziellen Erfordernisse wirtschaftlicher Themen vor dem Hintergrund der Fachdidaktik der Analysis dargestellt. Anhand ausgewählter Beispiele wird das Zusammenspiel mathematischer und ökonomischer Gesichtspunkte mit Blick auf die aktuelle Modellierungsdiskussionen angesprochen.

1. Allgemeine Aspekte ökonomischer Modellierungen mit Hilfsmitteln der Analysis

Die Genese der Analysis und Ihrer Didaktik ist stark geprägt von dem Anliegen, naturwissenschaftliche – insbesondere physikalische – Phänomene zu beschreiben bzw. zu untersuchen. Werden mathematische Methoden zur Modellierung ökonomischer Sachverhalte verwendet, so muss die Interpretation berücksichtigen, dass die Paradigmen der Wirtschaftswissenschaften von denen der Naturwissenschaften abweichen. May (2001, S. 8 ff.) nennt als wirtschaftliche Kategorien die Bedürfnisorientierung des menschlichen Handelns und die Knappheit der Güter als Motivation für ökonomisches Verhalten. Ferner ist wirtschaftliches Agieren – selbst unter Rationalitätsannahmen – konfliktgeprägt, entscheidungsbestimmt, risikobehaftet sowie nutzen- und gewinnorientiert.

Anders als in den Naturwissenschaften werden viele Untersuchungsobjekte in der Ökonomie zunächst mithilfe diskreter Größen beschrieben. So können Geldbeträge (es gibt eine kleinste Währungseinheit), Stück- und Personenzahlen durch natürliche Zahlen ausgedrückt werden. Erst bei komplexeren Überlegungen erscheint es zweckmäßig, ursprünglich als diskret angesehene Variablen durch stetige zu ersetzen und damit die originären Sachverhalte einer Modellierung mithilfe kontinuierlicher Größen zuzuführen. Dies eröffnet die Möglichkeit, im mathematischen Modell (vgl. Blum, 1985, S. 200) mit geeigneten Teilmengen der reellen Zahlen und Funktionen zu arbeiten, die Gegenstand des analytischen Kalküls sind. Zudem müssen Differenzierbarkeits- bzw. Integrierbarkeitseigenschaften vorliegen oder im Zuge der Modellierung sichergestellt werden.

Tietze et al. (2000, S. 207 ff.) nennen als zentrale Anwendungsgebiete der Analysis in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften Wachstumsmodelle, die Theorie der Marktpreisbildung, Kosten-, Erlös- und Gewinntheorie sowie die Steuergesetzgebung (vgl. auch Henn (1988)). In zunehmendem Maße bedient sich auch die moderne Finanzmathematik anspruchsvoller analytischer Methoden, etwa bei der stochastischen Modellierung des Börsengeschehens.

Danckwerts et al. (2006, S. 13) stellen der Anwendung des Kalküls Ideen und Bedeutungen gegenüber und fordern deren stärkere Betonung. Die gegebenen Interpretationen schließen eher eine ökonomische Deutung mit ein als eine primär geometrische Sicht elementarer analytischer Konzepte. So gibt die Idee der Ableitung als Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungs*rate* eine Sichtweise wieder, die nahe liegende ökonomische Anwendungen mit einschließt; auch die gewählte Terminologie erleichtert den Übergang zu ökonomischen Anwendungen. Gleiches gilt für das Integral als Idee der *Rekonstruktion* einer Funktion aus ihren Änderungsraten.

2. Vorgegebene Modellierungen und Aufgabenbeispiele

Wirtschaftsmathematische Standardlehrwerke bieten eher selten echte Modellierungsaufgaben. In der Analysis dominieren eingekleidete Aufgaben zur Auffindung lokaler Extrema und zu anderen Themen der „Kurvendiskussion". Immerhin wird der Lernende zuweilen auf den Modellcharakter der Vorgaben hingewiesen, so etwa in Sydsaeter et al. (2004, S. 350):

„In einem ökonomischen Modell ist die Anzahl der Familien, deren Einkommen nicht größer als x ist und die einen Heimcomputer haben, gegeben durch $p(x)=a+k(1-e^{-cx})$ (a, k und c sind positive Konstanten). Bestimmen Sie $p'(x)$ und $p''(x)$. Hat $p(x)$ ein Maximum? (…)"

Mitunter werden aber auch lediglich geometrische bzw. physikalische Gegebenheiten im Sinne eines Materialverbrauchs interpretiert und erfahren so eine (zusätzliche) ökonomische Deutung, vgl. wieder Sydsaeter et al. (2004, S. 350 f.). Derartige Extremwertaufgaben deuten die Rolle mathematisch-analytischer Methoden in der Ökonomie allenfalls an; über den Modellierungsvorgang selbst sagen sie nichts aus.

3. Zum Gebrauch der Ableitung in wirtschaftsmathematischen Zusammenhängen

Einzelanwendungen der Differentialrechnung werden in ökonomischen Zusammenhängen oft unter dem Sammelbegriff Marginalanalyse zusammengefasst. Steht zum Beispiel x für eine Fertigungsmenge und $K(x)$ für die davon abhängigen Kosten, so ist $\Delta K(x)=K(x+\Delta x)$ die Kostenänderung bei Veränderung der Fertigungsmenge x um Δx. Division durch die Mengenänderung führt zu einem relativen Maß für die Kostenänderung, also auf den Differenzenquotienten. Durch den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ergibt sich der übliche Differentialquotient, der in diesem Fall als marginale Kostenquote bzw. Grenzkostenfunktion bezeichnet wird. Er erfährt in wirtschaftsmathematischen Darstellungen neben der bereits erwähnten Interpretation als (lokale) Änderungsrate eine Deutung, die den Approximationsaspekt der ersten Ableitung betont: Sie ist die beste lineare Näherung der Funktion im Punkt (x, $K(x)$), vgl. Purkert (1999, S.271 f.), Sydsaeter et al. (2004, S.225 ff.) sowie die Diskussion von Möller (2004, S. 62 f.). Gelegentlich entwickelt sich bei Studienanfängern die Fehlvorstellung, dass die so gewonnenen Näherungswerte die exakten Funktionswerte von K wiedergeben. Ein weiteres, in wirtschaftsmathematischen Anfängervorlesungen häufig anzutreffendes Missverständnis liegt in der Annahme, dass der Zweck des Differenzierens in der (vermeintlichen) Auswertung der Funktion in Punkten „nahe bei x" besteht.

Tietze et al. (2000, S. 215) weisen darauf hin, dass die zentralen Sätze des Kalküls auch inhaltliche Zusammenhänge herstellen. Ein Beispiel bietet das in der Ökonomie häufig verwendete Konzept der Durchschnittsfunktion, also im Falle obiger Kostenfunktion der Quotient $K(x)/x$. Er gibt die durchschnittlichen Kosten pro produziertem Stück an. Differentiation nach der Quotientenregel führt zusammen mit der notwendigen Bedingung für das Vorliegen lokaler Extrema auf die Gleichung $K'(x) = K(x)/x$. Dies bedeutet, dass die Werte von Grenz- und Durchschnittskosten in Punkten mit maximalen bzw. minimalen Durchschnittskosten übereinstimmen.

Ein weiterer, in wirtschaftsmathematischen Kontexten meist früh eingeführter Begriff ist der der Elastizität. Hier wird ein Maß für die relative Änderung einer abhängigen Größe y im Verhältnis zur relativen Änderung einer unabhängigen Größe x erklärt. Leicht nachvollziehbare Erläuterungen zur Preiselastizität (Luxusgüter sind preiselastisch, Grundnahrungsmittel preisunelastisch) motivieren die Definition. Sie führt im Falle einer differenzierbaren Funktion f auf den Term $\varepsilon_{f,x} = f'(x) \cdot x / f(x)$.

Elementare Anwendungen der Differentiationsregeln verifizieren entsprechende Regeln für die Elastizität bezüglich Funktionsverknüpfungen. So erhält man über die Produktregel für zwei Funktionen f und g die Gleichung $\varepsilon_{f \cdot g} = \varepsilon_{f,x} + \varepsilon_{g,x}$, was den Studierenden demonstriert, wie über den Kalkül ökonomisch interpretierbare Aussagen gewonnen werden können.

4. Beobachtungen und Erfahrungen

Die in ökonomischen Kontexten auftretenden mathematischen Anwendungen sind in einem höheren Maße Resultate „willkürlicher" Modellierungen als die eher kanonisierte Verwendung der Mathematik im Zusammenhang mit physikalischen Themen. Dies bietet die Möglichkeit, den Modellierungsvorgang stärker in das Bewusstsein der Studenten zu heben und diese zum Erfinden alternativer Ansätze anzuregen. Manchmal wird auf diese Weise auch ein bekanntes Konzept wieder-erfunden, vgl.

hierzu auch Freudenthal (1983, S. 32 f.). In jedem Fall fördert diese Relativierung oft vorgefertigter Modelle Kritikfähigkeit und Urteilsvermögen.

Ein elementares Beispiel stellt bereits die Bewertung von Gütern und Dienstleistung durch einen Geldpreis auf einer eindimensionalen Skala dar. Hier handelt es sich um eine – sicher nicht immer unproblematische – Abstraktion, also um eine Modellierung. In ähnlicher Weise können Grundideen des Modellierens von Wahrscheinlichkeiten und Risiken sowie die Einbeziehung der Zeit als wertbeeinflussender Größe diskutiert werden. Auch das Verständnis von Methoden der deskriptiven Statistik bewirkt eine Sensibilisierung hinsichtlich des Modellierungsvorgangs. Informationen aus der „realen Welt" werden gefiltert und durch eine überschaubare Zahl von Parametern o.ä. repräsentiert. Sinnvolle Abstraktion ist somit auch eine Kunst geschickten Weglassens bzw. geeigneter Selektion.

Literatur

[1] Blum, W.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. Mathematische Semesterberichte 32, H.2, 195-232

[2] Danckwerts, R.; Vogel, D.: Analysis verständlich unterrichten. München, Heidelberg, 2006

[3] Freudenthal, Hans: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht, 1983

[4] Henn, H.-W.: Einkommensbesteuerung aus mathematischer Sicht. ZDM 20, 148-163

[5] May, H.: Didaktik der ökonomischen Bildung. München, Wien, 2001

[6] Möller, Regina D.: Anwendungen funktionalen Denkens auf wirtschaftliche Zusammenhänge. MU 50, H.6, (2004), 57–64

[7] Purkert, W.: Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Stuttgart, 1999

[8] Sydsaeter, K.; Hammond, P.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Pearson Studium, 2004

[9] Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H.: Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1. Vieweg, 2000