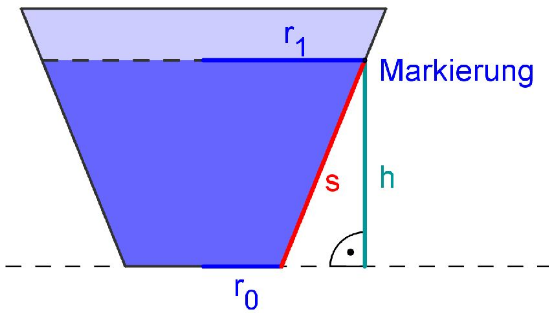
Anita DORFMAYR, Wien

Modellieren am Messbecher – ein Unterrichtsprojekt

Abstract: Die Ergebnisse internationaler Studien wie PISA, TIMSS, aber auch die Bildungsstandards machen deutlich, dass von einem zeitgemäßen Mathematikunterricht mehr erwartet wird als das Erlernen von Rechentechniken. Wie können neben dem Operieren jedoch auch Kompetenzen wie Modellieren, Argumentieren und Interpretieren geschult werden? In diesem Vortrag wird an Hand eines CAS-gestützten Unterrichtsprojektes zum „Becherproblem“ versucht, Antworten auf diese Frage zu geben. Dieses Problem, das im Vortrag von Hans HUMENBERGER genau vorgestellt wird, kann methodisch variabel aufbereitet und im Unterricht vielseitig als Modellierungsaufgabe eingesetzt werden. Konkrete Erfahrungen aus dem Unterricht zeigen die Chancen und Grenzen dieses Themas auf.

1. Das Becher-Problem

Gegeben ist ein kegelstumpfförmiger Messbecher mit Basiskreisradius r_0. Die Markierung für ein vorgegebenes Füllvolumen V hat vom Basiskreis die *Schrägentfernung* s.
Ist die Form des Bechers allein durch die Angabe von r_0, V und s eindeutig festgelegt?



Die Motivation, das Becher-Problem in Projektform im Unterricht einzusetzen, begründet sich vor allem im Wunsch, bei den Schülern die Kompetenzen des mathematischen Modellierens, Begründens und Interpretierens zu stärken. Weiters soll durch möglichst eigenständige Bearbeitung der Fragestellung die Eigenverantwortung im Recherchieren, Zeitmanagement und Dokumentieren unterstützt werden. Nicht zuletzt ist bei Modellierungsaufgaben wie der vorliegenden auch die Kreativität der Schüler gefordert, und die projektartige Umsetzung ermöglicht das leistungsdifferenzierte Unterrichten.

2. Konzeption des Becher-Projektes

Das Becher-Projekt wurde für eine Schülergruppe von 7 Schülern der 10. Schulstufe konzipiert, die das Wahlpflichtfach[1] Mathematik besucht. Alle Schüler verwenden seit Beginn der 9. Schulstufe auch im Regelunterricht ein Computer Algebra System (TI Voyage 200) und haben Erfahrung im Einsatz von Dynamischer Geometrie Software (GeoGebra) und Tabellenkalkulation.

Im Vordergrund stehen beim Becher-Projekt das mathematische Modellieren, sowie die Klärung der Existenz- und Eindeutigkeitsfrage. Die Reihenfolge der Aufgaben wurde so gewählt, dass zuerst Aufgaben zum Drehzylinder gestellt werden, dann erst Aufgaben zum Drehkegelstumpf. Außerdem läuft der Weg stets von den gemessenen Werten hin zum allgemeinen.

Das methodisch-didaktische Konzept für das Projekt sieht keinen Lehrervortrag vor. Die Schülergruppe arbeitet zwei Nachmittage á 4 Einheiten lang im Computersaal an den Aufgabestellungen. Die Schüler haben freie Werkzeugwahl, freie Wahl der Sozialform und können auch die Art der Dokumentation frei entscheiden. Den Schülern stehen für ihre Arbeit zwei kegelstumpfförmige Messbecher zur Verfügung.

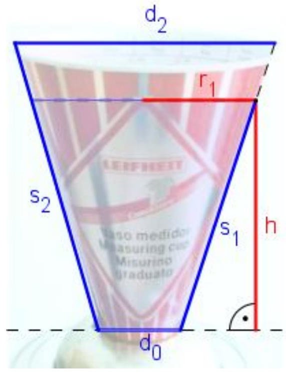
3. Auswahl an Aufgabestellungen und Schülerlösungen

Aufgabe 4: *Verwende für diese Aufgabe dein Bechermodell!*
a) Wie groß ist der Abstand h der Markierung für 300 ml vom unteren Basiskreis? Miss nach! Ist die Form des Bechers allein durch die Angabe der Füllmenge und von h eindeutig festgelegt? Begründe!
b) Wie groß ist die Schrägentfernung s der Markierung für 300 ml vom unteren Basiskreis? Miss nach! Ist die Form des Bechers allein durch die Angabe der Füllmenge und von s eindeutig festgelegt? Begründe!

Nachdem die Schüler ausführlich über die Frage „Was heißt eindeutig?“ diskutiert hatten, erhoben sie an den vorliegenden Bechern konkrete Daten. Als Messwerkzeuge stand ihnen nur ihr Dreieck zur Verfügung.

[1] Entspricht einem Leistungskurs

Mathias und Manuel waren mit der Genauigkeit ihrer Messung unzufrieden. Sie erhöhten die Genauigkeit ihrer Daten, indem sie neben dem Geodreieck auch Papierstreifen zum Messen verwendeten. So erhoben sie die Daten für d_0, s_1, s_2 und d_2. Anschließend berechneten sie mit Hilfe des Strahlensatzes r_1 und ermittelten h mit Hilfe des Satzes von Pythagoras.



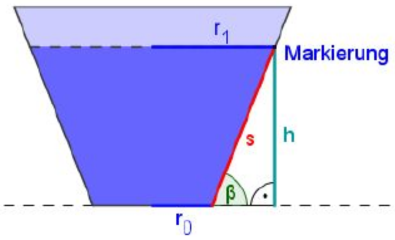
Ausschnitt aus Noreens Dokumentation:

a) Messung: h ≈ 9,5

Nein, die Form ist nicht eindeutig festgelegt, da die Radien verschiedene Werte annehmen können. Die Radien bewegen sich aber innerhalb einer gewissen Größe die von V und h abhängig ist.

b) Messung: s ≈ 10,5

Nein, da β einen unterschiedliche Größe haben kann wobei s und V gleich bleiben,



Noreen glaubt erkannt zu haben, dass die Radien nicht beliebig groß werden können. Zu Aufgabe b) argumentiert Noreen im Gespräch mit dem Lehrer über das Drehen der Seitenkante. Der Winkel, über den sie hier in ihrer Dokumentation argumentiert, spiegelt diese Idee wider.

Aufgabe 6:

c) Gib Funktionsgleichungen für die Radien $r_0(h)$ und $r_1(h)$ an [...]!

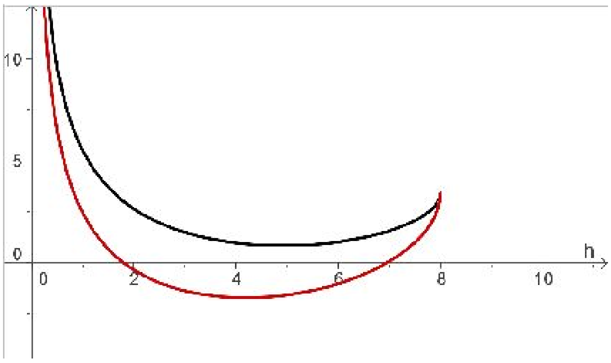
d) Zeichne $r_0(h)$ und $r_1(h)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem!

Mit Hilfe des Voyage erhalten die Schüler schon nach kurzer Zeit folgende Funktionsgleichungen für $r_0(h)$:

$$r_{01}(h)=\frac{-3h\sqrt{\pi(s^2-h^2)}+\sqrt{-3h}\sqrt{h\pi s^2-12V-h^3\pi}}{6h\sqrt{\pi}}$$

$$r_{02}(h)=\frac{-\sqrt{-3h}\sqrt{h\pi s^2-12V-h^3\pi}-3h\sqrt{\pi(s^2-h^2)}}{6h\sqrt{\pi}}$$

Schwierigkeiten gab es bei den Fragen, welche der beiden Lösungen positiv ist und vor allem bei der Frage, was die Wurzel aus -3h zu bedeuten hätte. Eben diese Wurzel aus -3h stellte die Schüler auch bei der Eingabe der Funktionsgleichung in GeoGebra vor Probleme.



Anita und Noreen erzeugten in GeoGebra unterschiedliche Grafen für r0(h). Durch die Interpretation der Grafen als Basiskreisradien war ihnen rasch klar, dass der rote Graf falsch sein musste. Der Grund dafür war allerdings nur schwer zu finden: Noreen hatte einen Vorzeichenfehler.

4. Ergebnisse

Die schriftliche Dokumentation ihrer Arbeit während des Projektes haben sechs der sieben Schüler am Computer verfasst. Im Vergleich zum tatsächlichen Unterrichtsverlauf zeigt sich allerdings, dass die Dokumentationen unvollständig sind: Weder Fehler, die behoben werden konnten, noch Probleme wie etwa bei der Eingabe komplexer Terme in GeoGebra, werden niedergeschrieben.

Die Dokumentation ist weiters nicht authentisch im Hinblick auf die Argumentation der Schüler. Verbal begründen vor allem Burschen eher anschaulich, während Mädchen versuchen, ihre Ideen eher durch mathematische Formeln und Funktionsgrafen zu untermauern. In Gesprächen mit dem Lehrer zeigte sich, dass offensichtlich trotzdem beide Geschlechter anschaulich zu denken scheinen. In den schriftlichen Arbeiten dominieren bei beiden Geschlechtern formale, „mathematisch exakte“ Formulierungen.

Das Projekt führte in der betroffenen Schülergruppe zu interessanten Diskussionen. Das Interesse am vorliegenden Modellierungsproblem war groß. Dennoch erscheint das Projekt in der vorliegenden Fassung nicht für den Regelunterricht Mathematik einer 10. Schulstufe geeignet. Dies ist vor allem im großen Zeitaufwand begründet, der für die Bearbeitung dieser Modellierungsaufgabe allerdings notwendig erscheint.

Literatur

[1] Hans Humenberger: Eindeutigkeits- und Umkehrfragen bei Messbechern, preprint 2007.