Petr EISENMANN, Ústí n. L.

Unendliche Reihen

Der Beitrag beschreibt drei Hauptprobleme der Studenten beim Verständnis der Summe der unendlichen Reihe und schlägt konkrete Wege zu ihrer Beseitigung vor.

Im Mathematikunterricht am Gymnasium wird oft folgende Frage diskutiert

$$\text{Gilt es } 0,\overline{9} < 1 \text{ oder } 0,\overline{9} = 1 \text{ ?}$$

Aus meiner langen Hochschullehrerpraxis weiss ich, dass die meisten neuen Studenten des ersten Jahrgangs ohne Zögern die erste Variante wählen. Ihre Argumentation ist meistens immer gleich: *Wenn die Dezimalzahl mit Null anfängt, kann sie nicht Eins gleich sein, sie ist kleiner als Eins.* Ähnlich zitieren Mundy und Graham häufige Äußerungen der Studenten *Die Zahl* $0,\overline{9}$ *ist ungefähr gleich* 1*, geht zu* 1*, aber sie ist nicht genau gleich* 1 (s. [1]). Bei folgender Diskussion mit den Studenten ist es passend zu zeigen, dass man $0,\overline{9}$ als eine unendliche Summe begreifen kann

$$0,\overline{9} = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \ldots \quad . \qquad (1)$$

So sind wir bei den unendlichen Reihen angelangt. Die Hauptfrage lautet jetzt so: Sind die Studenten fähig zu akzeptieren, dass eine Summe aus unendlich vielen positiven reellen Zahlen einen endlichen Wert haben kann? In den meisten Fällen lautet in dieser Stufe die Antwort Nein.

Meiner Meinung nach kann man drei Hauptprobleme der Studenten beim Verständnis der Summe der unendlichen Reihe bestimmen.

Erstens geht es um die Haltung der Studenten, dass es nicht möglich ist, eine Summe aus unendlich vielen Summanden zu addieren. Diese Meinung ist von Erfahrungen der Studenten mit endlichen Summen beeinflusst:

Das können wir nicht bestimmen, wenn es sich ins Unendliche zieht. Es hat doch kein Ende. (der Gymnasiast Ivan, 16 J.)

Wenn ich die Zahlen immer weiter addiere, gelingt es nicht, alle zu addieren. Ich setze doch immer noch etwas dazu. (die Gymnasiastin Marta, 17 J.)

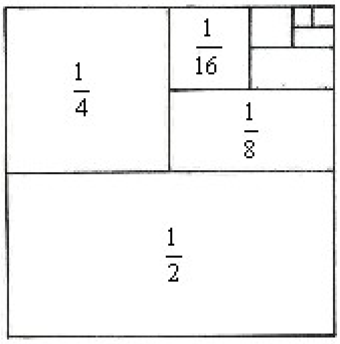
Zweitens gibt es hier die natürliche Vorstellung der meisten Studenten, dass die Folge der Partialsummen einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern über alle Grenzen wächst:

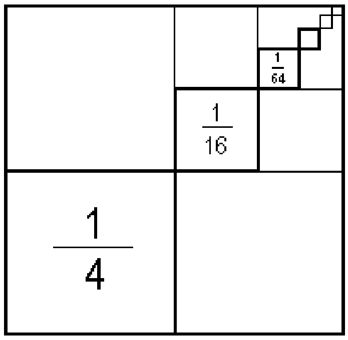
Wenn ich doch noch eine Zahl dazurechne, so wird sie immer größer, sie vergrößert sich immer, ins Unendliche. (der Gymnasiast Petr, 16 J.)

Diese Vorstellung korrespondiert von Gesichtspunkt aus der Beziehung der Phylogenese und Ontogenese des Begriffs Summe der Reihe mit der Überzeugung von Zenon (490 – 430 v. Chr.), dass die Summe der unendlichen Anzahl von Strecken unendlich sein muss.

Dieses Hindernis kann man bei den Studenten anhand der anschaulichen geometrischen Methoden überwinden. Erwähnen wir hier z. B. die originelle Idee von Nicole Oresme (1323? – 1382) (Abb. 1) beim Beweis der Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \text{¿·¿} = 1 \quad .$$





Ähnli umme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \text{¿·¿} = \frac{1}{3}$$

bestimmt werden (Abb. 2).

Nach Bewältigung dieses Problems im Unterricht taucht hier allerdings das dritte Problem auf (eng verbunden mit dem ersten). Die Studenten argumentieren z. B. bei der Abb. 1 so:

Es ist doch aber nie Eins, es nähert sich der Eins nur immer mehr an, aber nie kommt es an Eins heran. (die Gymnasiastin Marta, 17 J.)

Auch wenn wir ständig weiter addieren werden, immer fehlt es doch noch ein bisschen an Eins. (der Gymnasiast Ondra, 18 J.)

Die angeführten Äußerungen der Studenten beweisen ihre potentielle Auffassung des unendlichen Prozesses, der in dieser Aufgabe vorkommt. Den Studenten wurde die Summe einer Reihe noch nicht als der Grenzwert ihrer Partialsummenfolge definiert. Aber auch die Studenten, die dieses Thema schon behandelt haben, reagieren meistens beim Lösen von Nicht-Standard-Aufgaben ähnlich. Zum tieferen Verständnis des Grenzwertes (also auch der unendlichen Summe) führt ein weiter Weg.

Wie kann man bei der Lösung des letzten angeführten Problems im Unterricht vorgehen? Kommen wir auf das Einleitungsproblem zurück:

Gilt es $0,\overline{9} < 1$ oder $0,\overline{9} = 1$?

Das korrekte Verfahren stellt dieser Weg dar: Es wird der Grenzwertbegriff für Zahlenfolgen behandelt, dann wird die Summe einer Reihe als der Grenzwert ihrer Partialsummenfolge definiert, die Summenformel für unendliche geometrische Reihen entwickelt und mithilfe dieser Formel die Summe (1) bestimmt:

$$a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = 0{,}9 \cdot \frac{1}{1-0{,}1} = 1 \quad . \qquad (2)$$

Die Studenten eignen sich jedoch die Fertigkeit, die Summe einer konvergenten geometrischen Reihe mithilfe der Formel (2) zu bestimmen, meistens nur formal an. Sie verstehen gewöhnlich nicht, was sie eigentlich machen, und sie sehen oft keinen Zusammenhang mit der Gleichsetzung $0,\overline{9}$ = 1.

Die Lehrer verfolgen oft im Unterricht zur Begründung der Aussage $0,\overline{9}$ = 1 folgendes „Gleichungsverfahren“

$$\begin{aligned} x &= 0,\overline{9} && \cdot 10 \\ 10x &= 9,\overline{9} && - \\ 9x &= 9 && \\ x &= 1 && \end{aligned}$$

Diese „elegante“ Lösung hat gewöhnlich auf die Studenten Wirkung. Sie basiert aber auf einem kleinen Betrug. Um die unendliche Folge von Ziffern nach dem Dezimalpunkt zu beseitigen, multiplizieren und subtrahieren wir hier die unendlichen Dezimalfolgen Glied für Glied, ohne nach der Richtigkeit dieses Vorgehens zu fragen.

Folgende Anregung kann eine wertvolle Diskussion hervorrufen.

Wenn gilt $0,\overline{9} < 1$*, dann muss die Differenz* $1 - 0,\overline{9}$ *eine positive reelle Zahl sein, so wie zum Beispiel gilt*

$$0{,}9 < 1 \quad \textit{und deswegen} \quad 1 - 0{,}9 = 0{,}1 > 0.$$

Was ist also $1 - 0,\overline{9}$ *gleich?*

Die Studenten kommen in einer gewöhnlich lebhaften Diskussion bald zu dem Schluss, dass das Ergebnis keine Zahl in Form von 0,000000001 sein kann, auch wenn dort noch so viele Nullen wären (korrekt gesagt – beliebig, aber endlich viele). Der Grund ist klar – die Summe dieser Zahl mit der Zahl $0,\overline{9}$ ist offensichtlich größer als 1. Die Studenten geben also Vorschläge wie 0,000…1 (*unendlich viele Nullen und am Ende Eins*) oder *Zehn hoch Minusunendlich* (was dasselbe ist). Diese Diskussion betrifft die potentielle und aktuale Auffassung des unendlichen Grenzwertprozesses und ist von Gesichtspunkt der Bildung der Vorstellungen vom Grenzwertprozess aus sehr wertvoll.

Ein starkes Argument zugunsten der Gleichsetzung $0,\overline{9} = 1$ bietet auch eine passende Interpretation des bekannten Paradoxons des Zenon von Elea (um 480 – 435 v. Chr.) an (s. z. B. [2]).

Zum Abschluss will ich meine Überzeugung äußern, dass die zweckgemäße Stufenfolge bei der Behandlung des Begriffes Summe der Reihe im Unterricht ist: Motivation mithilfe eines Problems der Summe einer unendlichen Reihe (etwa $0,\overline{9} = 1$) → Grenzwert der Folge → Summe der Reihe.

Literatur

[1] Mundy, F. J., Graham, K.: Research in Calculus Learning: Understanding of Limits, Derivatives and Integrals, in: MAA Notes 33, 1994, 31 – 45

[2] Jahnke, Th.: Mathematik, Vorstufe des Kurssystems, Cornelsen, Düsseldorf, 1991