Mutfried HARTMANN, Nürnberg

Analogisieren am Beispiel des Pythagoras

Die *Sensibilisierung für Phänomene*, sowie die *Fähigkeit zum Problemlösen* stellen zentrale allgemeine Lernziele des Mathematikunterrichts dar. Die seit der Antike geschätzte und in der Mathematikdidaktik unter verschiedenen Aspekten, wie z.B. kreative Begriffsbildung (Weth 2000), Variation (Schupp 2002) oder Verallgemeinerung (Deschauer 1992) immer wieder aufgegriffene heuristische Methode des Analogisierens kann zu beidem einen wichtigen Beitrag leisten. Der Satz des Pythagoras erweist sich dabei als ideales Feld, um im Unterricht die Schlagkraft des Analogisierens in beeindruckender Weise zu vermitteln. Hier sollen zunächst räumliche Analogien des Satzes vorgestellt werden. Anschließend soll gezeigt werden, wie Schüler mittels des Analogisierens in die Lage versetzt werden können, selbständig erfolgreich Zerlegungsbeweise für den ursprünglichen Satz des Pythagoras zu entdecken.

1. Räumliche Analogien

Auf der Suche nach räumlichen Analogien zum Satz des Pythagoras muss zunächst überlegt werden, welche geometrischen Körper als Analogien zum rechtwinkligen Dreieck gelten könnten. Hier soll sich auf den Ansatz beschränkt werden, das rechtwinklige Dreieck als Abschnitt eines Rechtecks zu interpretieren. Damit bieten sich als räumliche Analoga Abschnitte des Quaders an. Ein naheliegender Ansatz wäre ein rechtwinkliges Dreiecksprisma (vgl. Abb. 1) oder aber Tetraeder zu wählen, die aus dem Quader geschnitten werden (vgl. Abb. 2 - 4). Die drei Tetraedertypen stellen übrigens die drei wesentlich unterschiedlichen Möglichkeiten dar, aus dem allgemeinen Quader durch Schnitte über die Ecken Tetraeder zu erzeugen.

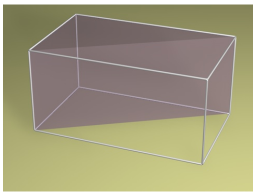

Abb. 1: Dreiecksprisma

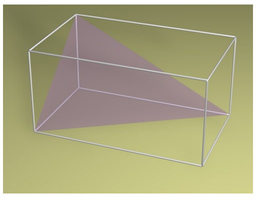

Abb. 2: Faulhaber-Tetraeder

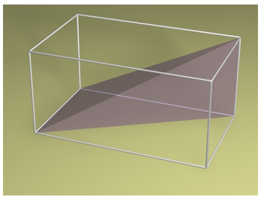

Abb. 3: Bubeck-Tetraeder

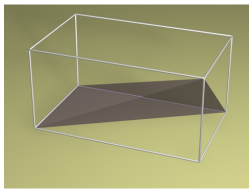

Abb. 4: Schiefes Tetraeder

Damit ist ein erster Schritt des Analogisierens getan, nämlich ein irgendwie ähnliches System entdeckt bzw. erzeugt zu haben. Die wesentliche Frage, die sich nun stellt, ist: „Existieren in diesen Systemen auch ähnliche interne Beziehungen, wie sie zwischen den drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks bestehen?“ Dies ist tatsächlich sogar für alle vier Objekte der Fall.

Dreiecksprisma: Die Quadrate der Inhalte zweier aufeinander senkrecht stehender Seitenflächen ist hier gleich dem Quadrat der entsprechenden „Diagonalfläche“ (vgl. Abb. 5). Dies wird, wie sich leicht zeigen lässt, direkt durch die „pythagoreische Beziehung“ der entsprechenden Kanten induziert. Es lässt sich unmittelbar ableiten, dass damit auch für die drei Flächen aus Abb. 6 eine solche pythagoreische Beziehung gilt.

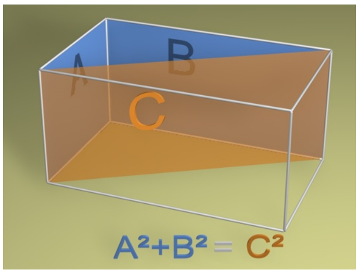

Abb. 5

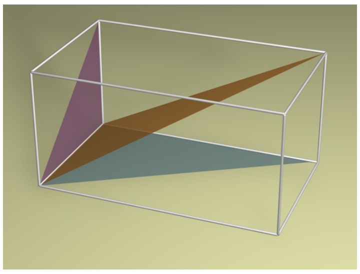

Abb. 6

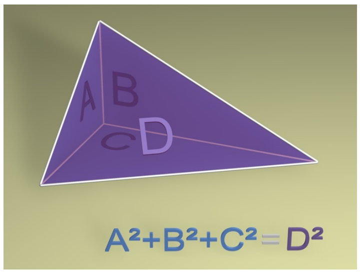

Abb. 7

Faulhaber-Tetraeder: Das Quadrat der die rechtwinklige Raumecke bildenden Flächen A, B und C ist gleich dem Quadrat der dieser Ecke gegenüberliegenden „Hypotenusenfläche“ D (vgl. Abb. 7). Dies wurde von dem Ulmer Mathematiker Johannes Faulhaber bereits 1622 in seiner „Miracula Arithmetica“ publiziert.

Bubeck-Tetraeder: Bubeck (1992) konnte zeigen, dass in diesem Tetraeder die Differenzen der Quadrate der gegenüberliegenden Flächen übereinstimmen (vgl. Abb. 8).

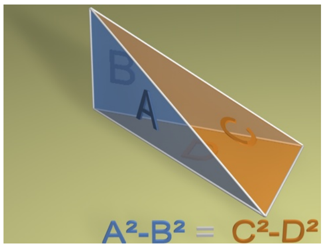

Abb. 8

Schiefes Tetraeder: Hier gilt, dass die Quadratsummen aus Grundfläche A und „Überhangfläche“ B gleich der Quadratsumme der beiden anderen Seitenflächen C und D sind (vgl. Abb. 9).

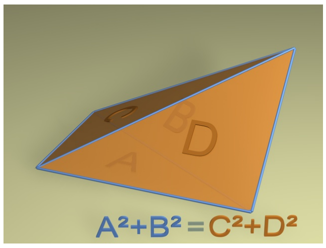

Abb. 9

Wie eng auch wieder die einzelnen Analogisierungen miteinander in Bezug stehen, wird z.B. daran deutlich, dass ein Beweis für das „Schiefe Tetraeder“ allein aufbauend auf den Analogisierungen „Dreiecksprisma“ und „Faulhaber-Tetraeder“ geführt werden kann. Abb. 10 zeigt eine Strukturübersicht eines solchen Beweises.

Neben den pythagoreischen Beziehungen der Flächen finden sich in diesen Körpern auch noch jede Menge pythagoreischer Beziehungen der Kanten. Etwa gilt für das „Faulhaber-Tetraeder“ bzw. das „Schiefe Tetraeder“, dass die Summen bzw. die Differenzen der Quadrate gegenüberliegender Kanten übereinstimmen.

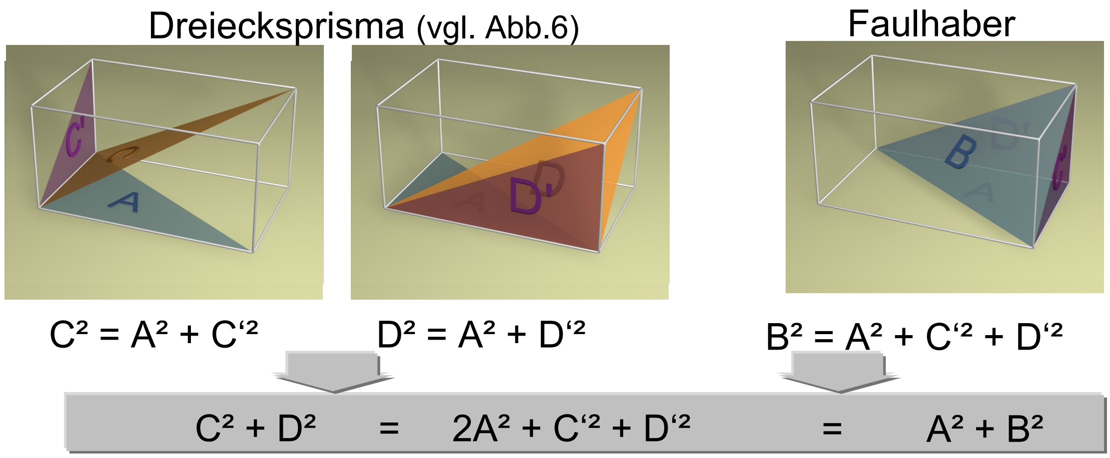

Abb. 10: Beweis der pythagoreischen Beziehung im „Schiefen Tetraeder“

2. Entdecken von Zerlegungsbeweisen mithilfe des Analogisierens

Soll das Analogisieren als zentrale heuristische Methode im Unterricht etabliert werden, ist es unumgänglich, Beispiele zu finden, die dem Lehrer erlauben, innerhalb des Standardstoffs zu verbleiben, und andererseits dem Schüler eine hohe Erfolgswahrscheinlichkeit bieten. Hierzu eignen sich in idealer Weise die Zerlegungsbeweise des pythagoreischen Lehrsatzes. Dort können, ausgehend vom Sonderfall einer geeigneten Zerlegung am rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck, entsprechende Zerlegungen am allgemeinen rechtwinkligen Dreieck analogisiert werden.

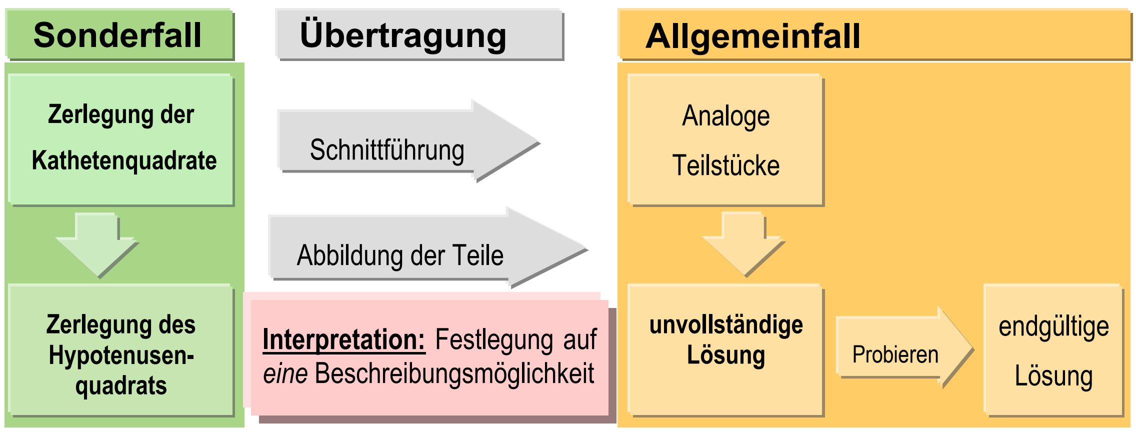

Abb. 11: Analyse des Analogisierungsprozesses

Ein Beispiel für eine gemeinsame Zerlegung der Kathetenquadrate und des Hypotenusenquadrats im Sonderfall zeigt Abb. 12. Der Analogisierungsprozess (vgl. Abb. 11) beginnt mit der Interpretation der Schnittführung der Kathetenquadrate. Hierzu muss aus einer Vielzahl von Möglichkeiten, die Schnittführung mathematisch präzise zu beschreiben, eine Möglichkeit ausgewählt werden, wie etwa Parallele zu c durch C und zu d durch B (vgl. Abb.13 und 15).

Damit sind unterschiedlichste Analogisierungsmöglichkeiten verbunden (vgl. Abb. 14 - 19). Die Beispiele von Abb.15-17 laufen auf verschiedene Varianten der Zerlegung nach Perigal hinaus.

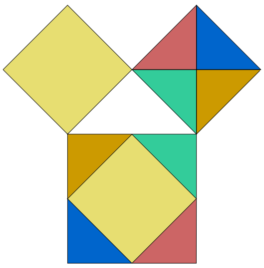

Abb. 12

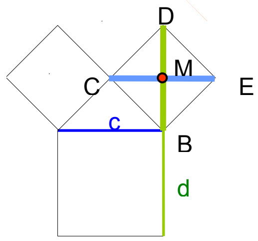

Abb. 13

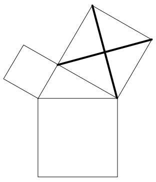

Abb. 14

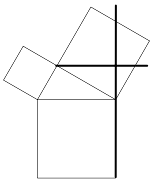

Abb. 15

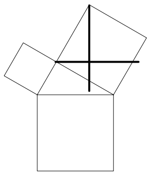

Abb. 16

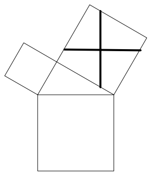

Abb. 17

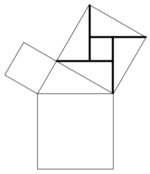

Abb. 18

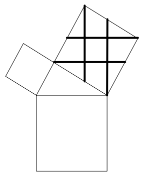

Abb. 19

Interessanterweise kommt man aber auch mit anderen Interpretationen, z.B. als Diagonalenschnitt (vgl. Abb. 14), zu Ergebnissen. Hier liefert eine der möglichen Interpretationen der Abbildungen der analogen Teilstücke als Verschiebungen - Quadratmitte auf Quadratmitte und rechte Ecken auf rechte Ecken - eine zunächst unvollständige Lösung (Abb. 20). Diese kann aber mit Probieren schnell zu einer endgültigen Lösung (vgl. etwa Abb. 21) modifiziert werden.

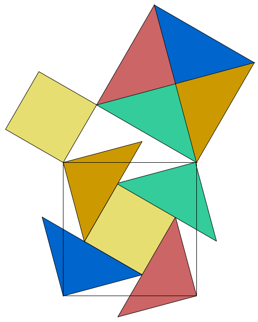

Abb. 20

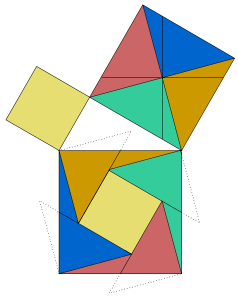

Abb. 21

Literatur

[1] Heinrich Bubeck: Pythagoras im dreidimensionalen Raum. In: Didaktik der Mathematik (1992) 2/20, S. 153-161

[2] Stephan Deschauer: Verallgemeinerung und Analogiebildung am Beispiel der Satzgruppe des Pythagoras. In: MU (1999), 1

[3] Hans Schupp: Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim, Berlin: Franzbecker (2002)

[4] Thomas Weth: Mathematische Erfindungen im Umfeld des Satzes von Pythagoras. In: PM (2000), 2/42, S. 70 – 75

http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Vortrag/GDM