Hans HUMENBERGER, Wien

Eindeutigkeits- und Umkehrfragen bei Messbechern

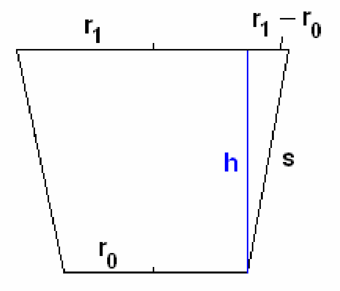
Bei einem vorgegebenen *drehzylindrischen* Messbecher (gegebener Radius des Basiskreises) können die „zugehörigen“ Höhen für die Markierungen von Volumina leicht ausgerechnet, d. h. die Frage beantwortet werden: in welcher Höhe h muss der Strich für 500 ml gemacht werden, wenn der Basiskreis einen Durchmesser von 5 cm hat? Umgekehrt liegt durch die Information über h für 500 ml der Basiskreisradius (und damit die „Gestalt“ des als drehzylindrisch vorausgesetzten Messbechers) natürlich eindeutig fest und kann ebenso leicht berechnet werden.

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist die Frage, ob die Form eines kegelstumpfförmigen Messbechers durch seine Markierungen am Rand für gewisse Volumenwerte feststeht oder nicht. Gibt es (immer, manchmal, nie?) auch noch andere Becher mit denselben Volumenwerten in derselben „Schrägentfernung“ auf einer Mantellinie? Insofern handelt es sich um eine Eindeutigkeitsfrage. Klarer Weise liegen umgekehrt die Schrägentfernungen für die jeweiligen Volumenwerte bei vorgegebener Form des Kegelstumpfes (Radien, Höhe) eindeutig fest, insofern handelt es sich bei der obigen Frage um eine „Umkehrfrage“.

Aus Platzgründen kann hier nur der Fall von *einer* Markierung etwas näher betrachtet werden (auch darüber gäbe es mehr). Den vollen Reiz entwickelt diese Fragestellung aber natürlich erst, wenn man mehrere Markierungen des Messbechers heranzieht. Hierzu geben wir unten nur das Resultat an.

Eine Markierung bei Messbechern

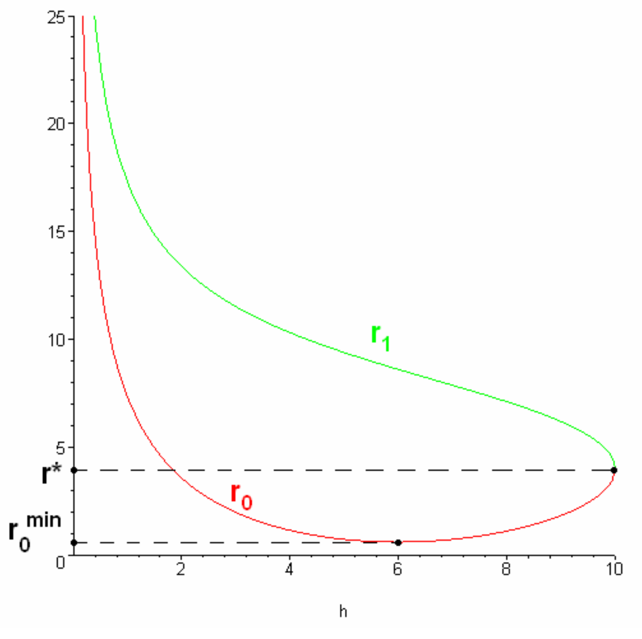
Bei kegelstumpfförmigen Messbechern ist die Becherform durch die bloße Angabe eines Wertes von s bei gegebenem Wert von V (z. B. 500 ml) noch nicht eindeutig festgelegt. Dies ist sicher schon rein intuitiv klar, kann aber auch an der Volumenformel für Kegelstümpfe eingesehen und noch etwas näher untersucht werden: $V = \frac{\pi h}{3}\left(r_0^2 + r_0 r_1 + r_1^2\right)$.



h ist dabei die Höhe; r_0, r_1 sind die Radien am Boden bzw. in Höhe h; wir setzen dabei immer $r_0 \le r_1$ voraus, d. h. der *kleinere* Radius ist *unten*.

Mit Hilfe des bekannten Wertes von s kann man noch eine der Variablen r_0, r_1 oder h durch die jeweils anderen beiden ausdrücken:

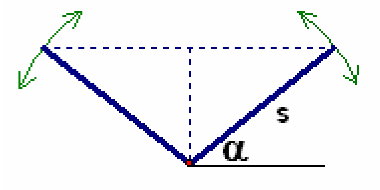
z. B. $(r_1 - r_0)^2 = s^2 - h^2 \;\Leftrightarrow\; r_1 = r_0 + \sqrt{s^2 - h^2}$). Durch Einsetzen in die obige Volumenformel ergibt sich $\frac{3V}{\pi} = h \cdot \left(3r_0^2 + 3r_0\sqrt{s^2 - h^2} + s^2 - h^2\right)$. Man hat aber dann immer noch zwei Variablen, nämlich h und r_0 (s und V sind ja bekannt) und nur eine Gleichung. Es gäbe also ein ganzes „Kontinuum von Lösungen", d. h. Becherformen, die bei Volumen V dieselbe Entfernung s auf der Mantellinie aufweisen. Man könnte hier noch den expliziten Zusammenhang zwischen r_0 und h herstellen (obige Gleichung ist ja eine nur quadratische in r_0) und dann die beiden Graphen von $r_0(h)$ und $r_1(h)$ (z. B. für s = 10 und V = 500) für $0 < h \le s$ zeichnen. Daraus ergeben sich u. a. interessante Erkenntnisse über den kleineren (unteren) Radius r_0:

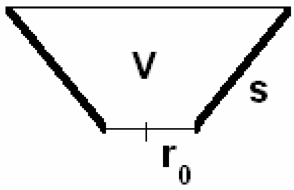


Man sieht an dieser Graphik:

- Bei h = s (=10) ist $r_0 = r^* = r_1$ (Zylinder).
- Es gibt offenbar einen Minimalwert $r_0^{\min}$ von r_0.
- Zu jedem vorgegebenen r_0 mit $r_0^{\min} < r_0 \le r^*$ gibt es jeweils *zwei verschiedene* passende Werte von h (und damit auch r_1, d. h. Kegelstumpfformen mit dem Wertepaar (s, V)).

Es ist auch plausibel, dass es hier einen nötigen Minimalwert von r_0 gibt (vgl. Abbildung unten): Bei festem s und variablem Neigungswinkel α der Erzeugenden hat das Volumen V bei einem Kegel ein Maximum $V_{\max}$. Wenn nun das in Rede stehende Volumen V des Kegelstumpfes größer als das mit s erreichbare Kegelvolumen $V_{\max}$ ist ($V > V_{\max}$), d. h. „$r_0 = 0$ nicht mehr reicht“, so muss r_0 eben einen bestimmten Minimalwert haben: $r_0 \geq r_0^{\min}$ („Auseinanderziehen“).

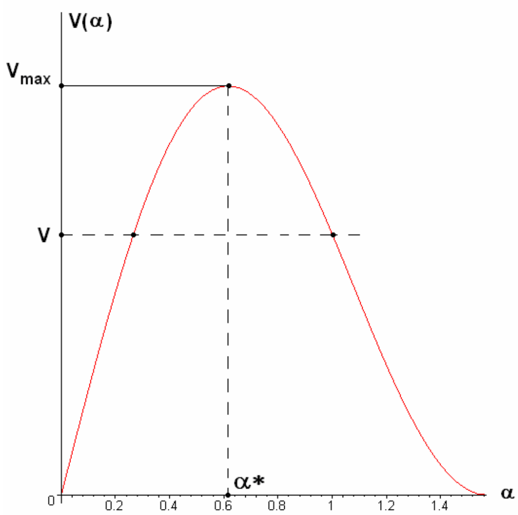




Bemerkungen:

- Mit der Vorstellung des Drehens der Erzeugenden kommt hier ein anschauliches *dynamisches* Moment ins Spiel, eine wichtige Vorstellung bei funktionalen Zusammenhängen: Wie *verändert* sich eine bestimmte Größe, wenn sich eine andere *verändert* („Kovariations-Vorstellung“).
- Es geht nur darum, die Existenz so eines Minimalwertes zu verstehen; wie groß dieser ist, sei hier nicht das Thema.

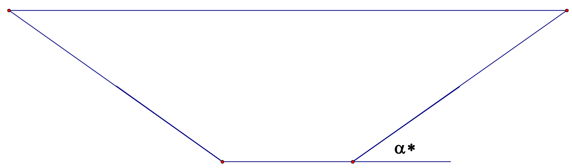
Man wird sich auch dafür interessieren (hier nicht von außen vorgegeben, sondern diese Frage hat sich geradezu aufgedrängt), bei *welchem* Neigungswinkel dieses maximale Volumen bei einem Kegel erreicht wird. Die Maximierung der Funktion $\alpha \mapsto V(\alpha) = \underbrace{\frac{s^3\pi}{3}}_{C} \sin\alpha\cos^2\alpha$ für $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ist eine klassische Extremwertaufgabe (unten auch der zugehörige Funktionsgraph): Maximales Volumen bei einem Neigungswinkel von $\alpha^* = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}62 \mathrel{\hat{=}} 35{,}3°$. Dieser Neigungswinkel hat also etwas Besonderes, er hat auch bei Kegelstümpfen Bedeutung – siehe unten.



Anders gelesen bedeutet dies: Gibt man bei einem Kegel die Erzeugendenlänge s fest vor, so gibt es für alle Volumenwerte $0 \leq V < V_{\max}$ jeweils zwei verschiedene Kegelformen: einen eher steilen und einen eher flachen (denn auf jeder solchen Höhe schneidet die Waagrechte den Graphen zweimal, siehe Abbildung)!

Mehrere Markierungen bei Messbechern

Wie ist die Lage nun bei mehreren Markierungen an Messbechern? Liegt der kegelstumpfförmige Messbecher eindeutig fest durch 2, 3, . . . Markierungen? Klar ist zunächst nur: Wenn er schon mit 2 Markierungen eindeutig festliegt, dann erst recht mit mehr als 2; deshalb liegt es nahe, zunächst den Fall von 2 Markierungen zu betrachten: 2 Schrägentfernungen s_1, s_2 zu den Volumenwerten V_1, V_2 (wenn aber die Becherform mit 2 Markierungen auch noch nicht eindeutig festliegt, dann könnte sie zumindest mit 3, 4, . . . Markierungen festliegen?). Dabei stellt sich heraus: Es kommt auf den Neigungswinkel der Becherwand an: Genau bei einem Neigungswinkel der Becherwand von $\alpha^* = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}62 \mathrel{\hat{=}} 35{,}3°$ (derselbe Winkel wie oben bei Kegeln – für einen Becher eigentlich ziemlich flach!)



liegt die Form des Bechers eindeutig fest. Bei allen anderen Steilheiten des Bechers gibt es jeweils einen zugehörigen „Partnerbecher" mit denselben beiden Wertepaaren (s_1, V_1) und (s_2, V_2) jenseits der „magischen Grenze" von $\alpha^* = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}62 \mathrel{\hat{=}} 35{,}3°$, d. h. einen flacheren, wenn der Ausgangsbecher steiler ist und umgekehrt!

In weiterer Folge ergibt sich, dass auch noch so viele zusätzliche Markierungen (d. h. Wertepaare (s_i, V_i)) an dieser Doppeldeutigkeit nichts ändern würden – ein vielleicht ebenso überraschendes Resultat!

Dabei können und sollen auch die jeweiligen Partnerbecher zu vorgegebenen realen (in den Unterricht mitgebrachten) Bechern am besten aus Karton gebaut werden. Dies ist eine gute Gelegenheit zum Basteln im Mathematikunterricht (davon gibt es ohnehin nicht so viele), und es kann der „Volumentest" mittels Umschütten von Zucker o. Ä. gemacht werden:

- Erhöhung der Anschaulichkeit („Mathematik zum Begreifen")
- Spannende Aufgabe (Wie sieht das Netz eines kegelstumpfförmigen Bechers mit den entsprechenden Angaben aus?)

Die dahinter steckende Mathematik (Oberstufe ab Klasse 11) ist insgesamt elementar, hat aber andererseits sicher genügend „Substanz" (CAS-Einsatz, Interpretieren, Begründen, Extremwertaufgabe, Gleichungen lösen, etc.) für ein lohnendes und spannendes Unterrichtsthema.