Tünde KÁNTOR, Debrecen, Ungarn

Alte oder neue Probleme?

Einleitung

In diesem Beitrag beschäftigen wir uns mit verschiedenen Kugel-Lagerungsproblemen. Wir betrachten verschiedene Aspekte dieses Themas. Unsere Aspekte werden sein:

1. Alltagsleben-Probleme (Lagerung der Orangenpyramide auf dem Markt)
2. Projektprobleme (Photo der Orangenpyramide)
3. Wettbewerbproblem (2004 AMC 10 A, Problem 7)
4. Kugel-Pyramiden in Tobias Mayers Mathematischem Atlas (Tab. XLV.)

Analyse der Kugel-Lagerungsprobleme

Alltagsleben-Probleme *(Lagerung der Orangenpyramide auf dem Markt)*
Wenn wir auf den Markt oder Weihnachtsmarkt gehen, sehen wir dass die Händler von den Kugelförmigen Warenhaufen (Orangen, Eiern, Weihnacht Dekorationen) Pyramiden formen. Das ist ein alter, gewöhnlicher Brauch. Warum formen die Händler Pyramiden?
Unsere Antwort ist: Es ist schön, praktisch und traditionell.

Projektprobleme *(Comenius Project)*
An dem Ungarischen „Varga Tamás Tagung" in November 2006, in Rahmen des praktisch-orientierten Mathematikunterrichts hatten Budapester Kollegen aus ihrer Praxis einige Lehrmittel präsentiert. In diesem Projekt bekommen die Schüler Photos aus dem Alltagsleben, und mit Hilfe der gezeichneten Photos diskutieren sie mathematische Probleme. Einige dieser Photos zeigten Haufen von Orangen.

Wettbewerbproblem *(2004 AMC 10 A, Problem 7)*
Beim Amerikanischen Mathematischen Wettbewerb war eine sehr ähnliche Aufgabe gestellt, aber es war ohne Figur.

2004 AMC 10 A Problem 7
Ein Gründzeughändler legt Orangenhaufen in Pyramidenform, so dass an der rechteckigen Grundseite 5, bzw. 8 Orangen in der unteren Lage liegen. Auf dem nächsten Niveau legt er die Orangen so dass über jede vier Orangen stellt er eine Orange. Diese Pyramide der Orangen endet mit einer einzigen Reihe von Orangen.
Wie viel Orangen sind in dieser Pyramide?

(A) 96 (B) 98 (C) 100 (D) 101 (E) 134

AMC (American Mathematics Competitions) sind Testbewerbe. Die Schüler können von den fünf Möglichkeiten wählen, aber genau eine Antwort ist gut. In unserem Fall war keine Figur dem Schüler vorgegeben, so mussten sie sich die Pyramide vorstellen. Für die Bestimmung der Summe der Orangen war ihre Strategie: zuerst Skizze machen und nachdenken, sodann die Zahl der Orangen an den oberen Niveaus und zuletzt ganz oben zu berechnen.

Ihre gute Lösung war: $S = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 4 = 100$.

Das bedeutet die Antwort (C) ist richtig.

Kugel-Pyramiden in Tobias Mayers Mathematischem Atlas (*Pfeffel, Augsburg, 1745)*

Schon seit vielen Jahren betreibe ich Forschungen über Geschichte der Mathematik in der Grossen Bibliothek des Reformiertes Kollegiums (Debrecen).

Hier hatte ich ein Exemplar Tobias Mayers Mathematischem Atlas entdeckt. In Tobias Mayers Mathematischem Atlas können wir weitere ähnliche Probleme wie 2004 AMC 10A Problem 7 finden (Tab. XLV. Fig. 5-9). Auf diesen Figuren sehen wir Kugelpyramiden von Kanonenkugeln und Bomben.

Tobias Mayer hat eine spezielle Methode. Jede Tabelle besteht aus drei separierten Teilen. Im mittleren Teil sind die Figuren, das Anschauungs-material, im äusseren Teil (links und rechts) stehen die Erklärungen und theoretische Informationen.

Betrachten wir Tabelle XLV. „darinnen das nötige von denen Kugelspielungen und Pyramiden samt etliche bei der Artillerie gebraucht Maschinen erhalten."

Die Teile der Tabelle XLV. sind:

a) Theoretische Teile (zwei Kolumnen)
   I. Von denen Kugel-Spielungen (1-7)
   II. Von denen Kugel-Pyramiden (7-8)
   III. Von einigen Werkzeugen zur Artillerie (9)
b) Figuren (drei Kolumnen): Fig.1-Fig. 14

Für uns sind Teil II. und Figuren 5-9 sehr interessant. An diesen Figuren sehen wir das räumliche Bild der Kugel-Pyramiden und an den Figuren 5a, 6A, 7A, 8A, 9A sind gegeben die Bilder des unteren und aller obere Niveaus. So war die Problemlösung - Strategie bei Tobias Mayer und bei unseren Schülern ganz gleich.

Analyse den Figuren

Figur 5
Die Kugeln formen eine regelmässige dreieckige Pyramide, die in eine Spitze ausläuft. Auf der Seite des Grunddreiecks sind 4 Kugeln, so ist die Summe:
$S = (4 + 3 + 2 + 1) + (3 + 2 + 1) + (2 + 1) + 1 = 20.$

Figur 6
Die Kugeln formen eine regelmässige viereckige Pyramide. Auf einen Seite des Grunddreiecks sind 5 Kugeln, so ist die Summe:
$S = 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55.$

Figur 7
Die Kugeln formen ein rechteckige Pyramide und enden in einer Reihe, wie in 2004 AMC 10A Problem 7. Die Anzahl der Kugel am Seite, des Grundrechtecks ist 4 (die kleine unterste Lage), bzw. 6, in der oberen Reihe 3 (die obere Lage), so die Summe: $S = 4 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 50.$
Diese Werte können wir von dem Tabelle I. „ Zu denen viereckigten und ablangen gevierdten Pyramiden“ ablesen: die obere Lage 3, die kleine unterste Lage 4, die Summe 50.
In dem Falle des Wettbewerbproblems: die obere Lage 4, die kleine unterste Lage 5, die Summe 100.

Figur 8 und Figur 9
Figur 8 und Figur 9 illustrieren die Fälle der sechseckigen Pyramide. Fig. 8 zeigt den Fall mit regelmässigem Grundsechseck und mit Spitze: die obere Lage 1, die kleine unterste Lage 5, die Summe 106.
Figur 9 zeigt den Fall: die obere Lage 2, die kleine unterste Lage 3, die Summe 57.
Diese Werte können wir von der Tabelle II. „ Zu denen sechseckigten u. ablang 6. eckigten Pyramiden“ ablesen.
Fig. 8A und Fig. 9A sind zu klein, vielleicht fällt eine Kugel in die letzte Kugel-Reihe, so können wir diese Fälle nicht gut beobachten.
Mit Hilfe von Tobias Mayers Mathematischem Atlas können wir auch die anderen Fälle mit den Schülern diskutieren und die Resultate in den Tabellen nachprüfen, oder allgemeine Formeln konstruieren.

Zusammenfassung

Unsere Beobachtungen zeigen dass lebensnahe mathematische Probleme den Prozess der Problemlösung für die Schüler interessanter machen.

Literatur

[1] American Mathematics Competition, 2004, AMC 10 A, The Mathematical Association of America

[2] Cofman, J.: Einblicke in die Geschichte der Mathematik, Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg-Berlin, 1999

[3] Kántor-Varga, T.: Mathematical Gems of Debrecen, Teaching Mathematics and Computer Science, 2003, 1/1, 73-110

[4] Kántor, T.: Über eine Verbindung zwischen Augsburg und Debrecen, Beiträge zum MU, 2004

[5] Kántor Sándorné Varga Tünde: Unknown Gem from the Library of the Reformed College of Debrecen, Bibliotheca Universitatis Debreciensis, Debrecen, 2004, XXVI. 11-132