

Gunta LACE, Riga

## **Wie kann man die Elemente der Kombinatorik in den Mittelstufenmathematikunterricht integrieren?**

In Lettland ist diese Frage sehr aktuell. In den Schulen Lettlands wird die Kombinatorik sehr wenig unterrichtet. In der Mittelstufe ein einzelnes Thema Kombinatorik gibt es nicht. Es werden einzelne Kombinationsaufgaben von den besonders begabten Schülern bei der Vorbereitung zur Matheolympiaden und auf der Matheolympiaden gerechnet. Aber es wäre nützlich, wenn alle Schüler eine Möglichkeit hätten, schon in der Mittelstufe für die Kombinatorik charakteristische Denkweise erlernen.

Wie kann man das bei derselben Stundenzahl schaffen, in dem man die Unterrichtsthemen nicht kürzt? Meine Antwort lautet – man muss im Unterricht Aufgaben lösen, die ihrer Denkweise nach kombinatorisch sind, aber inhaltlich den Mathematikthemen entsprechen, die die Schüler in der Mittelstufe erlernen sollen. Die Aufgaben, die Kombinatorik rechnet, kann man in 5 Gruppen einteilen:

- Gibt es ein Objekt, das den gegebenen Anforderungen entspricht?
- Mindestens ein Objekt entsprechend den gegebenen Anforderungen finden!
- Wie viele Objekte entsprechend den gegebenen Anforderungen gibt es?
- Einen Algorithmus erzeugen, mit dem man alle Objekte konstruieren kann, die den gegebenen Anforderungen entsprechen.
- Ein irgendwie extremales Objekt zu finden, der den gegebenen Anforderungen entspricht

Im Moment ist Mein Ziel, solche Aufgaben auszuarbeiten, die in eine von diesen fünf Gruppen passen könnten und gleichzeitig den Mittelstufenthemen entsprechen. Alle weiter behandelten Aufgaben kann man in den Themen der siebten Klasse: lineare Funktion oder lineare Gleichungen integrieren.

## Aufgabe 1

*Es sind drei Gleichungen gegeben:  $ax+b=0$ ;  $bx+c=0$ ;  $cx+a=0$ ;  $a$ ,  $b$  und  $c$  sind vom null unterschiedliche Zahlen. Ist es möglich diese Zahlen so zu wählen, damit man die Lösungen aller drei Gleichungen positiv sind?*

Diese Aufgabe kann man als Kombinatorikaufgabe der ersten Gruppe betrachten, weil man hier die Frage beantworten muss: Gibt es eine Menge von Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$ , die den gegebenen Anforderungen entspricht.

Die Aufgabe kann man verschiedenartig rechnen. Man kann einfach "Variantenüberschau" durchführen. Ansehen, welche Lösungen gibt es, wenn  $a>0$ ,  $b>0$ ,  $c>0$  und so weiter. Meistens wählen die Schüler diese Variante. Die Aufgabe ist nicht kompliziert, die Erfahrung zeigt, dass die meisten der Schüler versuchen sie zu rechnen, aber richtige Lösung bekommen nur ein Drittel. Wäre ganz zweckmäßig, den Schülern auch solche Lösungsmöglichkeit vorstellen:

Die Lösung der ersten Gleichung ist  $-b/a$ ;

Die Lösung der zweiten Gleichung ist  $-c/b$ ;

Die Lösung der dritten Gleichung ist  $-a/c$ .

Wenn man diese Lösungen multipliziert, bekommt man  $-1$ . Wenn man 3 positive Zahlen multipliziert, kann man nicht minus eins bekommen. Deshalb ist es mindestens eine von den Lösungen negativ. So haben wir bewiesen, dass das Suchobjekt nicht existiert.

Die Aufgabe kann man auf fünf und vier Gleichungen verallgemeinern. Besonders begabte Schüler könnten feststellen, wie groß sollte die Gleichungszahl  $n$  sein, um die obengenannte Eigenschaft zu erfüllen.

## Aufgabe 2

*In wie viele Teile können die Geraden, die den drei verschiedenen linearen Funktionen entsprechen, eine Ebene teilen?*

Obwohl die Aufgabe mit dem Fragewort "wie viel" beginnt, ist sie eher die Kombinatorikaufgabe der zweiten Gruppe, in der man mindestens ein Objekt konstruieren muss, der den gegebenen Anforderungen entspricht. Zum Beispiel, man muss zeigen, dass die Geraden eine Ebene in 4 Teilen schneiden können und so weiter. Auch diese Aufgabe kann man für den  $n$  – Funktionenfall verallgemeinern.

### Aufgabe 3

Variablen  $x$  und  $y$  sind proportionell. Die Tabelle ist für das Eintragen der Werte dieser Variablen vorgesehen. Keiner der Werte von Variablen ist gleich null. Welche ist die geringste Zahl der Tabellenspalten, die man ausfüllen sollte, damit man andere Spalten eindeutig ausfüllen könnte?

$x$					
$y$					

Diese ist die Kombinatorikaufgabe über das Finden des extremalen Elementen. Für die Schüler ist es wichtig zu verstehen, dass diese Aufgabe eigentlich aus zwei logischen Schritten besteht: 1) beweisen, dass man sechs Spalten so ausfüllen kann, dass man die Anforderungen erfüllt und 2) beweisen, dass es fünf Spalten nicht reichen.

Im Thema kann man auch Algorithmusaufgaben integrieren. Hier ein Beispiel!

### Aufgabe 4

Es gibt eine Gleichung  $*x+*=*$ . Peter schreibt eine Zahl an der Stelle von einem beliebigen Stern. Danach schreibt Martin eine Zahl an der Stelle von dem anderen Stern. Dann schreibt Peter eine Zahl an der Stelle vom letzten Stern. Man soll beweisen, dass Peter jede von drei Situationen bewirken kann:

- 1) Die Gleichung hat nur eine Lösung;
- 2) Die Gleichung hat keine Lösung;
- 3) Die Gleichung hat unendliche Zahl der Lösungen.

Diese Aufgabe hilft, das algorithmische Denken zu entwickeln. Das verbessert auch das Verständnis von der Wurzelzahl der linearen Gleichungen.

Über die Wurzelzahl der Linearen Gleichungen kann man auch eine Aufgabe machen, die die Frage der Kombinatorik beantwortet: "Wie viele Objekte entsprechend den gegebenen Anforderungen gibt es?"

## Aufgabe 5

Den Anforderungen der Aufgabe entsprechen Gleichungen, in denen  $a=c$  und  $b \neq d$ . Gleichheit  $a=c$  kann man in drei Arten erfüllen. In jeder von denen kann man die Zahlen  $b$  und  $d$  in sechs Arten wählen. Deshalb gibt es solche Gleichungen  $3 \cdot 6 = 18$ .

Bei der Lösung dieser Aufgabe ist es wichtig die Aufmerksamkeit der Technik des Zählens verschiedener Variante widmen. Natürlich muss man die verschiedenen Variante systematisch zählen, zum Beispiel, in dem man ein Schaubild zeichnet. Gerade das **systematische** Zählen der Variante bereitet Schwierigkeiten für die Schüler Lettlands bei der Lösung Aufgaben diesen Typs.

## Literatur

- [1] Agnis Andzans, Ilze Markusa: Vai vari atrisināt? Zvaigzne ABC, Riga 1996.