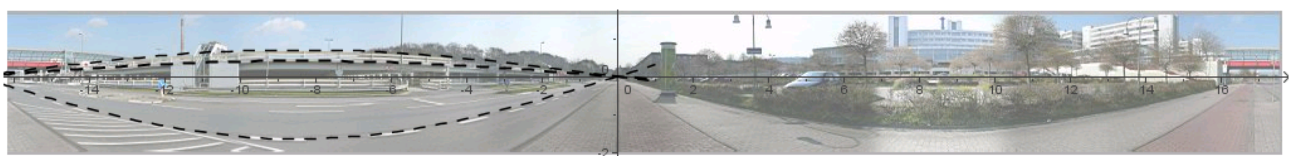
Barbara Ringel, Bielefeld

Die Sinuskurven der Panorama-Fotografie

In Zeitungen und Internet findet man immer öfter Panoramafotos. Diese fordern geradezu heraus, sich näher mit ihnen zu beschäftigen. Das hier abgebildete Foto zeigt die Universität Bielefeld, und zwar links im Bild ein Parkhaus, rechts das Hauptgebäude der Universität.

- Wie entsteht ein solches Bild?
- Was sind das für Verzerrungen, und wie entstehen sie?
- Man findet Bögen, oft ganze Familien von Bögen mit gleichen Fluchtpunkten. Wie kann man sie mathematisch beschreiben?

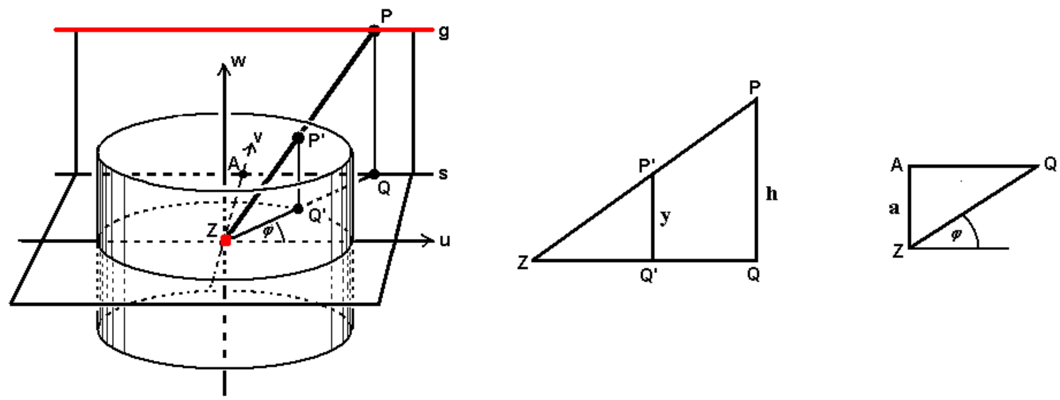


Die auftretenden Bögen lassen sich durch die verschiedensten Kurven sehr gut anpassen: es scheinen Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln, Kettenlinien und Sinuskurven gleichermaßen geeignet zu sein: Daher ist es für Schüler unmittelbar einsichtig, dass es einer genaueren Untersuchung bedarf, um diese Bögen adäquat zu beschreiben.

Wie Panorama-Fotos entstehen, ist schnell klar: Man fotografiert eine Reihe von Bildern, indem man sich jeweils etwas weiter dreht, insgesamt um 360°. Diese Bilder werden aneinandergesetzt, früher mit Schere und Klebstoff, heute mit geeigneter Software, die an den Überlappungen nahtlos angleicht. Das Gesamtbild, das bei der Drehung entsteht, ist also ein Bild auf einem Zylinder, das dann abgerollt wird. Rollt man das Bild wieder zu einem Zylinder auf und befindet sich der Betrachter in der Mitte des Zylinders, so sieht man die Verzerrungen nicht mehr. Ein Panoramafoto ist also die Zentralprojektion auf einen Zylinder. Das Projektionszentrum ist dabei das Auge des Betrachters, und dies liegt auf der Zylinder-Achse.

Panorama-Fotos im Mathematikunterricht

Wie sieht das Bild einer horizontalen, geradlinig verlaufenden Linie, etwa des Geländers des Parkhaus-Decks, auf der Fotografie aus? Und wie lässt sich das Bild der Straße mathematisch beschreiben? Dies waren die Leitfragen in einer Unterrichtsreihe in einer 10. Klasse.



Setzt man nun voraus, dass der Zylinder den Radius $r = 1$ besitzt, so gilt im abgerollten Bild für den Bildpunkt P' eines Punktes P:

$$y = \frac{h}{a}\sin(\varphi)$$

Dabei ist a der horizontale Abstand des Auges von der Geraden g und h die Höhe der Geraden g über der Augenebene. Der Quotient $\frac{h}{a}$ ist konstant: Das Bild der Geraden g auf dem abgerollten Zylinder zeigt also eine Sinus-Kurve, genauer: die Hälfte einer vollen Periode einer Sinuskurve, nämlich den Bogen mit $0 < \varphi < \pi$. Im Allgemeinen erhält man für eine beliebige horizontale Gerade einen entsprechenden Bogen, der allerdings entlang der x-Achse verschoben ist.

Das Problem lässt sich auch folgendermaßen beschreiben: Wir betrachten das Schnittverhalten eines Zylinders mit einer Ebene E. Die Ebene, von der hier die Rede ist, ist die Ursprungs-Ebene, die die Gerade g enthält, auf ihr liegen die Sichtstrahlen zu den Punkten P der Geraden. Nun weiß man aber, dass eine Ebene den Zylinder im Allgemeinen in einer Ellipse schneidet.

Zur Beantwortung der oben gestellten Fragen wurden in der Schule verschiedene Experimente durchgeführt: Mit Digitalkameras wurden Fotos gemacht und zusammengesetzt; diese Panoramabilder wurden mit einem "Viewer" auf dem PC betrachtet. Ein begehbarer Klarsicht-Zylinder, in dem waagrechte

Linien am Schulgebäude nachgezeichnet werden konnten, wurde eingesetzt. Kurvenanpassungen mit Hilfe von Excel wurden angefertigt, ferner wurde ein Modell eingesetzt, mit dem wandernde Punkte auf einer Geraden und ihre Bildpunkte auf dem Zylinder nachvollziehbar dargestellt werden. Pappzylinder, die geschnitten und abgerollt wurden, begleiteten den Unterricht, und die Begriffe Horizontlinie, Fluchtpunkte, Perspektive – bekannt aus dem Kunstunterricht der 8. Klasse – wurden wiederholend geklärt. Eine ausführliche Beschreibung der Unterrichtsreihe findet sich in Menze/Ringel [1].

Weiterführende Aspekte

• Es sind insgesamt acht mögliche Fälle zu unterscheiden, wie eine Gerade im $\mathbb{R}^3$, die im Panoramabild dargestellt werden soll, liegen kann. Die Bilder dieser Geraden können Punkte, Geraden oder Sinusbögen (über einem Intervall der Länge π) sein (Ringel/Ringel,[3]).

• Bekanntlich weisen die klassischen griechischen Tempel ganz charakteristische Krümmungen auf: Kurvatur und Entasis. Horizontal betrifft dies das Gesims über den Säulen, manchmal aber auch schon das Fundament. Diese Linien sind dann konvex gekrümmt, man spricht von Kurvatur. Vertikale Krümmungen treten bei den einzelnen Säulen auf, die sich nach oben hin verjüngen. In der Literatur wird darauf verwiesen, dass durch derartige Krümmungen die geometrische Starrheit der Linien aufgebrochen werde und dass so der Bau harmonischer und lebendiger erscheine.
Die in Ringel/Ringel [3] ausgeführten Überlegungen legen nahe, dass es sich nicht etwa um eine sphärische oder elliptische Krümmung, auf die in der Fachliteratur verwiesen wird, sondern um (Ausschnitte von) Sinuskurven handeln sollte, und die Höhenlage derartiger Tempel erklärt, warum oft schon das Fundament konvex gekrümmt gebaut wurde. Diese Sinuskurven entsprechen also denen der Panorama-Fotografie, die durch die Drehung des Kopfes hervorgerufen werden.

• In der Malerei gibt es Panorama-Bilder seit dem ausgehenden 18. Jahrhundert. Das weltweit erste derartige Panorama zeigt "London from the roof of Albion Mills (1793)". Dies ist ein Gemälde, das einem 360°-Panorama-Foto entspricht, und man erkennt sofort einige der charakteristischen Bögen.
Gut erhalten ist das Salzburg-Panorama von Johann Michael Sattler. Es

handelt sich um einen Rundblick von der Festung Hohensalzburg aus (die zur Entstehungszeit militärisch genutzt wurde, und damit auch den Salzburgern selbst nicht zugänglich war). Sucht man nach den charakteristischen Sinusbögen im (abgerollten)Salzburg-Panorama, so wird man enttäuscht. Es gibt eine Reihe von Gebäuden, bei denen im abgerollten Bild Sinusbögen zu sehen sein müssten – aber Sattler hat offensichtlich jedes einzelne Gebäude zentralperspektivisch gezeichnet. Dies führt allerdings dazu, dass im begehbaren Zylinder im Panorama-Museum bei einigen der dargestellten Gebäude Dachkanten und Friese gebogen erscheinen, obwohl sie gerade aussehen müssten.

Zusammenfassung

Panorama-Bilder haben sich als ein spannendes Beispiel für eine mathematische Modellierung anhand einer ausgesprochen authentischen Fragestellung erwiesen. Der Einsatz verschiedenartiger Modelle erlaubt ein hochgradig handlungsorientiertes Vorgehen, dabei werden eigene Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler einbezogen. Daneben bietet die Beschäftigung mit diesem Thema vielfältige Möglichkeiten, das eigene Sehen zu analysieren: die Erfahrung zu machen, dass durch eine Drehung des Kopfes gerade Straßenkanten zu Bögen werden. Die Beschäftigung mit diesem Thema bietet auch vielfältige Möglichkeiten, die Praxis des Sehens in Kunst und Architektur im Laufe der Geschichte zu erkunden.

Literatur

[1] Rainer Menze, Barbara Ringel: Oh, wie schön sind Panoramen! Mit Panoramafotografie Zylinderprojektionen und Sinuskurven erkunden. In: mathematik lehren 140, S. 55-59

[2] Rainer Menze, Barbara Ringel: Zu dem Artikel "Oh, wie schön sind Panoramen!" steht Aufgabenmaterial (mit Bildern und Exceldateien) beim Friedrich-Verlag zum Download bereit: www.mathematik-lehren.de

[3] Barbara Ringel, Claus Michael Ringel: Sinuskurven überall. Zur Mathematik der Panorama-Fotografie. Mathematica Didactica 29 (2006) 2, S. 75-113