Rainer H. KAENDERS, Köln

Von Wiskunde und Windmühlen: Über den Mathematikunterricht in den Niederlanden

Wiskunde ist das niederländische Wort für Mathematik. Es geht zurück auf den Mathematiker, Ingenieur und Gelehrten Simon Stevin, der nicht nur die Dezimalbrüche eingeführt sondern auch Windmühlen konstruiert hat. Die Metapher der Windmühle steht für eine sehr nützliche und sinnvolle Erfindung, die aber auch dazu missbraucht werden kann, Wind zu machen.

Die Niederlande sind mit nur 16,5 Mio. Einwohnern ein kleines reformfreudiges Land, aus dessen Erfahrungen wir vieles lernen können. Für eine gemeinsame Tradition und Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik steht auch der 1930 in die Niederlande emigrierte Deutsche, Hans Freudenthal. Als ein Pionier der Mathematikdidaktik hat er in den 70er Jahren mit den Arbeitsgruppen Wikobas und Wiskivon am IOWO, dem späteren Freudenthal Institut, neue ungewöhnliche Alternativen zu der seinerzeit einflussreichen New Math Bewegung entwickelt. Unter Rückgriff auf Freudenthalsche Prinzipien prägte Adri Treffers in den späten 80er Jahren den Begriff des *realistischen Mathematikunterrichts (RME)*. Ein Begriff, der seit dem zum Markenzeichen des Freudenthal Instituts und des gesamten niederländischen Mathematikunterrichts wurde (z.B. Case, 2005), da das Feudenthal Institut wie keine andere Einrichtung jahrzehntelang Einfluss auf den niederländischen Mathematikunterricht nehmen konnte (zum Beispiel bei *Hewet*,1980, Reform vwo mit Einführung *Wiskunde A* und *B* und *Hawex*, 1986, Reform für havo, *Basisvorming*, *mavo/vbo* sowie *vmbo* oder bei der Einführung der *Tweede Fase* u.a. mit den *Profiboeken*).

In internationalen Vergleichsstudien wie TIMSS oder Pisa 2003 und 2006 schneidet der niederländische Mathematikunterricht seit Jahren besser ab als der deutsche. Und doch befindet sich dieser Mathematikunterricht, vor allem in den Schulformen havo und vwo (vergleichbar mit Realschule bis zur Klasse 11 und Gymnasium bis zur 12) seit etwa zehn Jahren in einer Krise: der Umfang sowie der Charakter der vermittelten Mathematik stehen zur Diskussion, die ohnehin niedrigen Studentenzahlen an den Universitäten für Mathematik, einschließlich Lehramt, sind innerhalb dieser Zeit nochmal eingebrochen, Hochschulen klagen über die mathematischen Fertigkeiten der Studienanfänger und Studierende selbst beschweren sich bei der Ministerin („Lieve Maria!“) über das mathematische Rüstzeug, mit dem sie ein Studium der Mathematik, Informatik, Natur- oder Ingenieurwissenschaft beginnen müssen (www.lievemaria.nl oder Krieg et al. 2008).

Im Jahr 2005 hat jene Maria van der Hoeven, die damalige Ministerin für Unterricht, Kultur und Wissenschaft, mit der Einberufung einer ministeriellen *Kommission Zukunft des Mathematikunterrichts cTWO* eine umfangreiche Reform des Mathematikunterrichts in havo und vwo eingeleitet. Dazu gehört die Einrichtung neuer Fächer *Wiskunde A, B, C* und *D*. Nach dem Studentenprotest *Lieve Maria* wurde zusätzlich eine Resonanzkommission eingerichtet, um die Belange der Folgeausbildungen in Beruf und Hochschule im Auge zu behalten.

Gemäß dem Wunsch der Organisatoren möchte ich in diesem öffentlichen Vortrag einige Einblicke in die Praxis des realistischen Mathematikunterrichts der vergangenen Jahre geben. Vor allem konzentriere ich mich dabei auf die Schulformen havo und vwo. Ich habe 12 Jahre in der niederländischen Mathematik als Forscher, Lehrer und Didaktiker gearbeitet, war Redakteur des *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Mitglied der Kommissionen NOCW, cTWO (einschließlich Unterkommissionen). An der aktuellen zweischrittigen Reform (2007 und 2014) des niederländischen Mathematikunterrichts habe ich aktiv mitgewirkt.

Für eine umfassende Darstellung des niederländischen Mathematikunterrichts der letzten hundert Jahre sei verwiesen auf Goffree, F. et al. (2000).

1. Alltag des Mathematikunterrichts

Im niederländischen Schulsystem besuchen die Kinder acht Jahre lang die Grundschule (von 4 bis 12) und wechseln dann in eine der drei weiterführenden Schulformen vmbo, havo, vwo von jeweils 4, 5 und 6 Schuljahren. Die Schulform havo berechtigt zum Besuch der Fachhochschule und das vwo zum Universitätsstudium – abhängig von gewählten Fächerkombinationen.

Seit dem Jahr 1998 wurde in den Oberstufen von havo und vwo die so genannte *tweede fase* eingeführt, ein allgemeines Unterrichtsmodell, in dem selbstreguliertes Lernen angestrebt wird. Dazu gehört eine große Zahl von Facharbeiten, in denen eigene Untersuchungen in bis zu 80 Stunden durchgeführt und präsentiert werden. Schulen verfügen über eine weitgehende Autonomie, in der sie meist das Modell des *studiehuis* gewählt haben: die Schule als Ort, an dem Schülerinnen und Schüler ihren Lernprozess teilweise selbst gestalten können. Dazu gehört auch die entsprechenden aufwendige Verwaltung all dieser Lernprozesse durch die Lehrer.

Die Lehrer sind an ihren Schulen über individuell ausgehandelte, kündbare Verträge angestellt und haben die Möglichkeit, bis zu 10% ihrer Arbeitszeit für von der Schule bezahlte Fortbildungen zu verwenden. In der Mathematik gibt es dazu ein reichhaltiges Angebot: Nationale Wiskundedagen, Vakantiecursus CWI, Jaarvergadering van NVvW oder das Wintersymposium der *Koninklijken Wiskundig Genootschap* und viele weitere Angebote.

Der alltägliche Mathematikunterricht wird inhaltlich von einer *Methode* bestimmt, d.h. einer kompletten Schulbuchserie, von der sich Lehrer die gesamte Unterrichtsplanung abnehmen lassen können. In der Regel entscheidet sich eine Schule über alle Schulformen und Stufen für eine Methode, an die sie aus organisatorischen Gründen für Jahre gebunden ist.

2. Unkonventionelle Wege

Seit der Reform Hewet im Jahr 1980 prägt die Unterscheidung in *Wiskunde A* und *B* den niederländischen Mathematikunterricht. Die Themen des Faches Wiskunde B sind ähnlich zu den Themen unseres Mathematikunterrichts. Im Fokus von Wiskunde A, das maßgeblich vom Freudenthal Institut entwickelt und vorangetrieben wurde, stand zunächst der mündige Umgang mit Daten und mit Anwendungen der Mathematik in Beruf, Kultur und Alltag. Dieses hoch gesteckte Ziel wurde mit der Zeit bescheidener, da in der Regel Wiskunde A von mathematisch schwächeren Schülern gewählt wird. Doch bei aller möglichen Kritik: Gerade mathematisch schwache Schüler erfahren das Fach als sinnvoll, weil die Inhalte für sie für sie eine Bedeutung haben. Mathematik ist kein gehasstes Fach.

Neben dieser an den Schülern orientierten Differenzierung gibt es eine vielfältige Kultur von unkonventionellen Projekten. Die Bedarf an Projekten für Facharbeiten (praktische opdrachten, profielwerkstukken) hat zur Entwicklung innovativen Unterrichts geführt, sei es durch Materialien, wie den so genannten *Zebrabüchern* oder durch Entwicklungsforschung an den Universitäten in Delft, Eindhoven, Nimwegen und Twente (in Köln wird bald das mathematikdidaktische Internetlabor Math-il.de auf diese Art und Weise arbeiten). In Master- oder Webclasses bieten Universitäten interessierten Schülern bzw. potentiellen Studenten Unterstützung bei Facharbeiten an. Es gibt frei verfügbare Internetmaterialien (z.B. Wisweb und Rekenweb vom Freudenthal Institut, Ratio in Nimwegen oder Mathadore in Eindhoven. Neben dem *Kangoeroe* Wettbewerb und der Mathematik Olympiade gibt es verschiedene spannende Mathematikwettbewerbe für Schüler, in denen die Mathematik sich anders als im Schulalltag präsentiert. Beispiele sind das Mathematikturnier in Nimwegen (seit 2008 auch in Köln), die A-lympiade und der Wiskunde B-dag des Freudenthal Instituts, die auch in Deutschland vom Land NRW und der Uni Köln veranstaltet werden. Und nicht zuletzt gibt es mathematische Zeitschriften für Schüler (Pythagoras), für Lehrer (Euclides, Nieuwe Wiskrant) und für alle Mathematiker (Nieuw Archief voor Wiskunde). Typisch für die Kultur unkonventioneller Projekte ist der Auftritt bekannter Mathematiker auf Popkonzerten oder der Blog Wiskundemeisjes (www.wiskundemeisjes.nl).

3. Krise des Mathematikunterrichts

Der niederländische Mathematikunterricht in den Schulformen havo/vwo hat in den letzten 10 Jahren eine Krise erlebt. Ein äußeres Merkmal dieser Krise ist der landesweite Rückgang der ohnehin schon geringen Erstsemesteranzahlen im Jahr 1988 um zeitweise 64% im Studiengang Mathematik, zu denen auch zukünftige Mathematiklehrer in den Oberstufen von havo oder vwo gezählt werden. Die **eingebrochenen Anfängerzahlen** sind auch ein Maß dafür, wie viele Schüler der Mathematikunterricht so zu begeistern versteht, dass sie sich bei guten Berufsaussichten auch später in ihrem Studium noch der Mathematik widmen möchten.

Vor allem jedoch ist die fachliche Qualifikation der Lehrer gefährdet. Neben dem universitären Bildungsweg zur Lehrerlaubnis in der Sekundarstufe II gibt es auch fachwissenschaftlich weit weniger anspruchsvolle Wege über die Fachhochschulen (mit nur havo-Examen) zu diesem Ziel. Das zahlenmäßige Verhältnis von universitär ausgebildeten Mathematiklehrern in der Sek. II zu den an einer Fachhochschule fortgebildeten Lehrern in der Sek. II wird (trotz Nachfrage der *Niederländischen Kommission für Mathematikunterricht NOCW*) vom Ministerium nicht veröffentlicht. Der Vergleich der geringen Studierendenzahlen mit dem landesweiten Bedarf in der Sek. II zeigt jedoch, dass der zunächst als Ausnahme gedachte Ausbildungsweg zum Regelfall geworden ist.

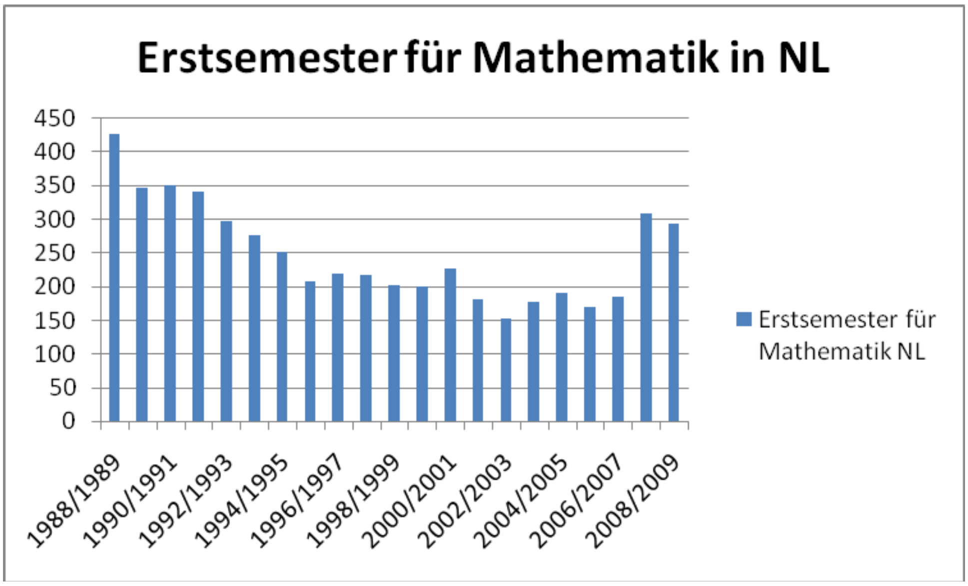

Tabelle 1: Landesweite Anzahlen der Erstsemester für Mathematik, technische Mathematik und Lehramt Mathematik (Sek. II) für havo/vwo an Universitäten.

Die Ursachen für diesen Rückgang sind sicherlich vielfältig. Neben gesellschaftlichen Veränderungen werden auch **inhaltliche Probleme** des tatsächlichen Mathematikunterrichts – realistisch oder nicht – für diese Krise verantwortlich gemacht (z. B. Kaenders, 2003; Wittmann, 2005).

Zunächst besteht die Realität des realistischen Mathematikunterrichts häufig aus **unrealistischen Kontexten**. Eine typische Aufgabe (Abschlussexamen, Wiskunde b1, vwo, 2006): „Um 15 Uhr wird die Heizung einer Sauna eingeschaltet. Von diesem Moment an wird die Sauna aufgewärmt. Dann gilt: $S(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0{,}29\,t}$. Hierbei ist *S* die Temperatur in Grad Celsius und *t* die Zeit in Stunden ab 15 Uhr.“ Ohne, dass hier ernsthaft Mathematik angewendet, mit ihr modelliert oder eine interessante

Frage beantwortet wird, vollführen die Schüler lediglich Standardberechnungen mit der Funktion *S*.

Weiterhin sind in der Mathematikdidaktik und insbesondere in der Entwicklung des realistischen Mathematikunterrichts viele nützliche und sinnvolle didaktische Werkzeuge entstanden, um Intuition für mathematische Konzepte aufzubauen. Mittlerweile wird jedoch an vielen Stellen der Erwerb mathematischer Konzepte durch den Umgang mit diesen didaktischen Werkzeugen *ersetzt*: **didaktische Werkzeuge werden zu mathematischen Inhalten**. Beispiele hierzu sind etwa *Pfeilketten*, die den Funktionsbegriff unterstützen, die *Brettchenmethode* (einen Teil der Gleichung zudecken und sich vorstellen, was dort stehen sollte) bzw. die *Balkenwaagenmethode* zur Lösung von Gleichungen. Sie sollen die Substitution von Funktionen bzw. elementare Aussagenlogik unterstützen. Auch Würfelgebäude für das räumliche Vorstellungsvermögen oder Vasen, die zur Vermittlung des Funktionsbegriffs gleichmäßig mit Wasser gefüllt werden, sind Hilfsmittel, mit denen seit Pisa ja auch deutsche Schüler fleißig umzugehen lernen.

Das vielleicht größte Problem jedoch ist eine **Veränderung der mathematischen Sprache**, durch welche die logischen, beschreibenden, erklärenden und integrativen Ausdrucksmöglichkeiten der Schüler im argumentativen, algebraischen und konzeptionellen Bereich stark eingeschränkt werden.

Zum Beispiel sind die meisten tragfähigen **Definitionen aus dem Mathematikunterricht verschwunden** oder durch Sentenzen ersetzt worden, die zwar in ihrem Duktus noch an Definitionen gemahnen, jedoch logisch und inhaltlich unsinnig sind. Es werden Pseudobegriffe eingeführt wie: „Ein Graph, der einen guten Eindruck eines Zusammenhangs vermittelt, heißt *vollständiger Graph*. Bei einem derartigen Graphen müssen die (eventuellen) Schnittpunkte mit den Achsen und die Extrema gut sichtbar sein.“ oder *gewinnende Funktionen*: „Funktionen, die auf die Dauer die größten Ergebnisse ergeben, nennt man *gewinnende Funktionen*. Quadratische Funktionen gewinnen gegen lineare Funktionen. …“. An anderer Stelle wird das Wort *Produktfunktion* so eingeführt als handelte es sich dabei um eine mathematische Definition: „Eine Funktion, die zu schreiben ist als Produkt zweier Funktionen, heißt eine *Produktfunktion*. Beispiel: $f(x) = g(x) \times h(x)$. (Moderne Wiskunde, wiskunde B12).

Durch das Fehlen von Definitionen oder gar von Unterricht, in dem das Definieren gelernt werden kann, sind Begründungen oder Beweise unmöglich, die sich auf haltbare Definitionen stützen. Daher müssen Argumentationen und Zusammenhänge an **eher intuitiven Vorstellungen** festgemacht werden. Tatsachen und Ergebnisse werden mit Sprache versehen – Zusammenhänge kaum. Verschiedene **Qualitäten mathematischer Einsicht** werden als zueinander gleichwertige Alternativen dargestellt. Z. B.: „Kontrolliere durch Plotten und mit einer Berechnung, dass die Gerade…“ oder

„Untersuche mit dem Taschenrechner in welchen Punkten der Graph die Steigung 0 hat. Was ist die Gleichung dieser Punkte?“ Dass all diese Handlungen in jeweils vollständig unterschiedlichen Qualitäten mathematischer Einsicht resultieren, wird relativiert und nicht problematisiert. Die Folge ist, dass **Abstraktion und mathematische Theoriebildung verhindert werden.** Höhere Van Hiele Niveaus bleiben für die Schüler unerreichbar und der **Einstieg in die mathematische Kultur** wird weitestgehend unmöglich gemacht.

In der Analysis zum Beispiel werden weder Extrema noch Monotonie definiert. In Argumentationen wird die Definitheit der Ableitung mit dem Monotonieverhalten gleichgesetzt, so dass schon die Funktion $f(x) = x^3$ zu einem Gegenbeispiel wird. Statt einer Definition finden sich Formulierungen, wie „…Falls ein Graph bei diesem Wert von x von steigend in sinkend übergeht, dann hat die Funktion ein Minimum.“, was bekanntlich durch die Funktion $h(x) = x^2 + x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ widerlegt wird. Kein Wunder, dass solche Beispiele mit dem Verweis auf die Mathematik der Schule auch als kleinlich angesehen werden. Kurzum, die entwickelte mathematische Sprache verfügt nicht über die Möglichkeiten, die eine adäquate Behandlung der Analysis erfordern würde.

In dieser Situation bleibt dann Büchern und Lehrern nichts anderes übrig, als **mathematische Sachverhalte zu verkündigen** ohne sie zu begründen oder gar in einen größeren theoretischen Kontext zu stellen. So wird etwa ohne Begründung mitgeteilt: „Für eine Potenzfunktion $f(x) = x^p$ ist $f'(x) = px^{p-1}$. Diese Regel gilt auch, wenn der Exponent eine negative Zahl oder ein Bruch ist.“ Zu den zentralen Abschlussprüfungen bekommen die Schüler Formelkarten, auf denen sich Formeln finden wie $x^n = c$ mit $x, c > 0$ und der Lösung $x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$.

Da die Sprache ohne Definitionen und Unterscheidung der Qualitäten mathematischer Einsicht keine Klarheit bietet, sehen sich die Autoren der zentralen Abschlussprüfungen gezwungen, die Sprache zu reglementieren. Hierdurch entsteht eine Form der **mathematischen Jurisprudenz**, bei der jede zu verrichtende Handlung akribisch festgelegt wird. Zum Beispiel „Lösen: Die Art der Lösung ist frei, muss aber erklärt werden. Bei Gebrauch des graphischen Taschenrechners müssen die benutzten Optionen genannt werden.“ Der Zusatz “algebraisch” oder “exakt” erlegt der Art und Weise des Lösens Beschränkungen auf: „…exakt: algebraisch, das schließliche Endergebnis darf nicht angenähert werden“ und „algebraisch: Schritt für Schritt, ohne Benutzung der Spezifischen Optionen des grafischen Taschenrechners; das Endergebnis darf angenähert werden.“

Ein weiteres ernsthaftes Problem ist das der **antididaktischen Ommission**. Ommission, d.h. das Weglassen von Details, Hintergründen und technischen Darstellungen gehört zu den wichtigsten Werkzeugen eines Lehrers/einer Lehrerin. Wenn jedoch für die weitere mathematische Entwicklung der Schüler unverzichtbare Inhalte einfach weggelassen werden, dann kann die Ommission als ‚antididaktisch' bezeichnet werden (vgl. *antididaktische Inversion* in Freudenthal, 1983, p. 305). Neben der Ommission von Definitionen, Beweisen und Theorien, in denen mathematische Objekte als eigenständige Objekte betrachtet werden, gehören dazu auch ganz konkreter Inhalte wie Primzahlen, Teilbarkeit, Bruchrechnung, Irrationalität oder die elementare Sprache der Aussagenlogik, Strukturen und Mengen und wichtige Aspekte infinitesimaler Konzepte wie Grenzwert, Stetigkeit, Asymptoten, Vollständigkeit, Differenzierbarkeit. Schon in der Grundschule gehören Standardalgorithmen wie schriftliche Division oder Multiplikation nicht mehr zum verpflichteten Kanon. Auch die Bruchrechnung ist in den letzten Jahren zusehends aus Schulbuchserien verschwunden.

In Einstiegstests an den Universitäten treten diese Ommissionen dann zu Tage. Andere, über den Bereich der algebraischen Fertigkeiten hinausgehende mathematikdidaktische Bemühungen, werden dabei gerne ignoriert.

PISA-Tests und Zentralexamen signalisieren diese Entwicklung nicht.

4. Die Reform

Seit dem Jahr 2005 ist die Reform des Mathematikunterrichts von havo/vwo in vollem Gang. Schon zu Beginn bestand in der Kommission cTWO Einvernehmen darüber, dass Wiskunde A in seiner Philosophie fortgeführt und durch das Fach Wiskunde C ergänzt werden sollte. Dabei konzentriert sich dieses neue Fach speziell auf soziale und kulturelle Aspekte, wohingegen Wiskunde A auch die ökonomischen und medizinischen Fächer im Blick hat. Das neue Wahlfach Wiskunde D ermöglicht authentischere Kontexte durch eine strukturelle Zusammenarbeit zwischen Schulen und Hochschule. Damit stellt es ein attraktives Angebot für mathematisch interessierte Schüler dar. Die Fächer Wiskunde C und D wurden schon 2007 eingeführt – ab 2014 sollen neue Lehrpläne für alle Fächer Wiskunde A, B, C und D gelten. Zur Unterstützung der Mathematiklehrer beim Umgang mit neuen Inhalten sind breite Fortbildungsprogramme eingerichtet und insbesondere Wiskunde D Förderstellen eingerichtet worden.

Im Zentrum der Reformen steht die Rückbesinnung auf die mathematische Kultur und Sprache. Die Kontexte sollen authentischer und der Einsatz elektronischer Hilfsmittel getreu der Devise *Use to learn* statt *Learn to use* gestaltet werden. Auch die Darstellung der Mathematik in der Außenwelt, d.h. in Kultur, Wirtschaft und Technik, soll ernst genommen werden.

Der Mangel an universitär ausgebildeten Mathematiklehrern und die mathematisch dürftigen Lehrerausbildungen außerhalb der Universität stellen in den kommenden Jahren die größte Herausforderung dar. Die Problem ist so groß, dass die akademische Mathematik jetzt im *Masterplan Toekomst Wiskunde* (NWO) sogar dafür plädiert, schon den universitären Bachelor in Mathematik gleich als Lehrerlaubnis für die Sekundarstufe II zu akzeptieren. Bisher ist dies ein Masterstudium. Aber im Vergleich zur Fachhochschulausbildung stellt schon der Bachelorabschluss an einer Universität die mathematisch viel anspruchsvollere Ausbildung dar.

Trotz aller Probleme bringt die Reform neue Hoffnung und Möglichkeiten. Seit zwei Jahren sind die Erstsemesterzahlen für Mathematik wieder leicht gestiegen. Am Freudenthal Institut, das seit 2006 einen neuen Direktor hat, verändern sich Auffassungen zu realistischem Mathematikunterricht: Rein mathematische Kontexte und Übungsmaterial sind nicht mehr verpönt. Und in der neuesten Auflage der Schulbuchserie *Getal en Ruimte* finden sich nach vielen Jahren wieder Primzahlen, ggT und kgV.

Sind dies die ersten Krokusse im neuen Frühling des niederländischen Mathematikunterrichts?

Literatur

Beukers, F., Blankespoor, J., Broer, H., Drijvers, P., Garst, S., Kaenders, R., Kleijne, W., Kollenveld, M., Peletier, M., Siersma, D., Van Asselt, R., Van der Giessen C., Van Streun, A. & Zaal C. (2007). *Rijk aan betekenis – Visie op vernieuwd Wiskundeonderwijs*. Visiedocument van de Commissie Toekomst WiskundeOnderwijs, cTWO, www.ctwo.nl.

Case, R.W. (2005). Report from the Netherlands: The Dutch Revolution in Secondary School Mathematics. *Mathematics Teacher*, Vol. 98, No. 6.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Doordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1978). *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*. München, Wien: Oldenbourg, R..

Goffree, F., van Hoorn, M. & Zwaneveld B. (2000). *Honderd jaar wiskundeonderwijs – Een jubileumboek*. Leusden: NVvW.

Kaenders, R.H. (2003). *Verum, Pulchrum, Bonum*. NAW, 5^e serie, 4 (2).

Krieg, A., Verhulst, F. & Walcher, S. (2008). *„Lieve Maria" Niederländische Studenten beschweren sich über den Mathematik-Schulunterricht*. Mitteilungen der DMV 16, pp. 16–18.

Landsman, N. P. (2008). *Where have all the students gone*? Nieuw Archief voor Wiskunde, 5^de serie, 9 (2).

Wittmann E. Ch. (2005). *Realistic Mathematics Education, past and present*. Nieuw Archief voor Wiskunde, 5^e serie, 6 (4).