

Elke SÖBBEKE, Universität Duisburg-Essen

„*Sehen und Verstehen*“ im Mathematikunterricht - Zur besonderen Funktion von Anschauungsmitteln für das Mathematiklernen

I Rolle der Anschauungsmittel für das Mathematiklernen

In den letzten zwanzig Jahren ist im Mathematikunterricht der Grundschule ein grundlegender Paradigmenwechsel erfolgt, der ausgelöst wurde durch eine neue Sicht auf Lernprozesse aber auch durch ein neues Verständnis der (Schul-) Mathematik. In diesem Zusammenhang wurde die Überwindung eines eher traditionellen Rechenunterrichts angestrebt, der vor allem dem Aufbau von rezeptbasierten Rechenfertigkeiten diente, und eine Hinwendung zu einem aktiv gestalteten Unterricht, in dem Kinder Mathematik entdecken, beschreiben und begründen. Mit diesem Paradigmenwechsel einhergehend hat sich auch ein bedeutsamer Perspektivwechsel hinsichtlich der Rolle, Nutzung und Funktion von Materialien und Anschauungsmitteln im Mathematikunterricht vollzogen. Ihr Status hat sich gewandelt von Werkzeugen des *Lehrens* zu Werkzeugen des *Lernens* (Krauthausen & Scherer 2001). Dieser Wandel soll im Folgenden in einigen Kernpunkten aufgezeigt werden, da er grundlegend für das vorliegende Forschungsinteresse ist.

Anschauungsmittel als Lehrmittel

In einem Unterricht, der durch ein eher traditionelles Verständnis von Lernen und Mathematik geprägt ist, ist der Einsatz von Anschauungsmitteln mit der Hoffnung und Intention verbunden, dass der tätige Umgang mit entsprechenden Materialien in einer weitgehend direkten und einfachen Weise das mathematisch relevante Wissen an das Kind vermitteln kann. Mathematik wird in einem solchen Kontext als eine Ansammlung fertiger Regeln, Verfahren und Sätze verstanden, die von der Lehrperson mit Hilfe geeigneter Materialien an die Schüler Stück für Stück übergeben werden könnte.

Eine solche Auffassung, dieses ist hinlänglich bekannt, entspricht nicht mehr den heutigen Kenntnissen über Lernprozesse, die als aktive und individuelle Konstruktionen verstanden werden. Insofern weiß man heute auch, dass ein mathematischer Begriff nicht in direkter Weise vom Anschauungsmittel „in den Kopf des Kindes“ transportiert werden kann, sondern, dass hierzu ein aktiver und individueller Deutungs- und Konstruktionsprozess notwendig ist.

Mathematik als Lernmittel

Mathematik heute wird zunehmend als eine Wissenschaft der Muster, Beziehungen und Strukturen gesehen (vgl. Wittmann 2003). Demzufolge handelt es sich bei den Inhalten der Mathematik nicht um konkrete Objekte, die mit Hilfe verschiedenster Instrumente untersucht werden können (wie dieses etwa in anderen Naturwissenschaften der Fall ist); vielmehr sind die Inhalte der Mathematik von abstrakter Natur. Diese Besonderheit des mathematischen Wissens macht ein *vermittelndes Medium* notwendig, um mit Kindern überhaupt über die abstrakten Inhalte und Begriffe sprechen oder nachdenken zu können. Durch einen handelnden und mentalen Umgang mit solch „vermittelnden“ Medien - den Anschauungsmitteln - soll das Kind unterstützt werden, adäquate mentale Vorstellungsbilder eben dieser abstrakten mathematischen Inhalte aufzubauen.

Anschauungsmittel sind vor diesem Hintergrund nicht mehr nur Hilfsmittel zum Rechnen, vielmehr erweitert sich ihre Funktion *substanziell* durch diese neue Sicht auf Mathematik: Wird Mathematiklernen verstanden als ein Prozess der zunehmend differenzierter werdenden Verstehens- und Deutungsweise der Kinder von abstrakten Mustern und Strukturen (vgl. Steinbring 2005), dann haben Anschauungsmittel keinen rein *didaktischen* oder *methodischen* Status mehr, sondern einen *epistemologischen*.

Anschauungsmittel als methodische Hilfsmittel oder als epistemologische Werkzeuge

In diesem *ersten* Beispiel dient das Anschauungsmittel in erster Linie dazu, die Lösung der gestellten Additionsaufgabe zu finden. Zunächst soll in dem Anschauungsmittel der zweite Summand durch Einzeichnen ergänzt werden, dann kann mit Hilfe des Materials die Summe und hiermit die Lösung der Rechenaufgabe

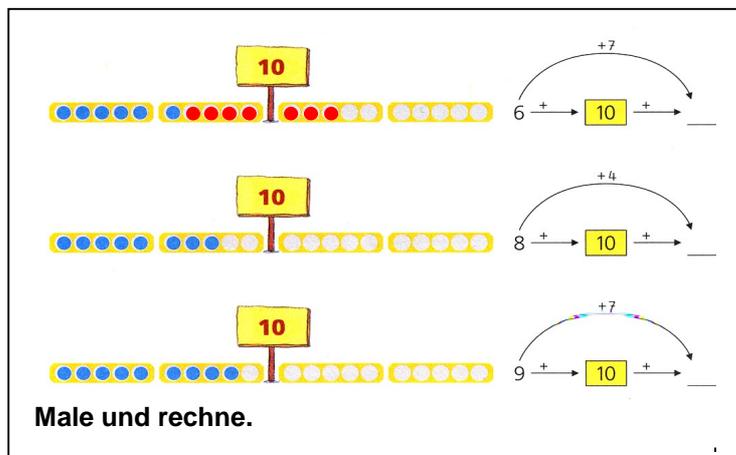


Abb. 1: Anschauungsmittel als methodisches Hilfsmittel.

bestimmt werden. Im Ganzen stehen bei dieser Funktion die konkreten Eigenschaften des Materials (wie zum Beispiel die Anzahl der Punkte) im Vordergrund, die in blau und rot gefärbt und anschließend abgezählt werden können.

In dem nachfolgenden *zweiten* Beispiel wird wieder ein Punktefeld als Anschauungsmittel genutzt; auch hier finden sich Punkte in roter und blauer

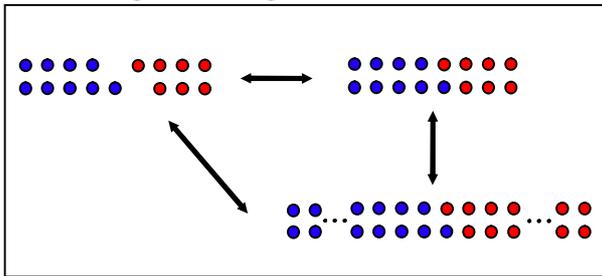


Abb. 2: Anschauungsmittel als Denkmittel.

Färbung. Jedoch sollen hier nicht die konkreten Eigenschaften des Materials im Mittelpunkt der Betrachtung stehen, sondern das Abstrakte, die *Beziehungen und Strukturen im Material*: In der Abbildung sind somit nicht die Farben an sich das Bedeutende,

auch die Anordnung der Punkte ist nicht aus ästhetischen Gründen das Entscheidende für eine mathematische Einsicht; es ist vielmehr die *Funktion*, die die konkrete Eigenschaft des Materials *für* etwas übernimmt. Welche Funktion ist dieses in dem Beispiel? Die Anordnung der Plättchen in den Zahldarstellungen ermöglicht die Deutung einer *übergeordneten Beziehung*: die Addition zweier ungerader Zahlen ergibt eine gerade Zahl und dieses muss - und das eröffnet *nur* die *abstrakte Struktur* der Darstellung - *immer* so sein. Das heißt, die Struktur der Darstellung ermöglicht eine Einsicht in eine mathematische Gesetzmäßigkeit; aber sie ist nicht direkt ablesbar oder konkret sinnlich erfahrbar; sie muss aktiv in die Darstellung hineingedeutet werden.

Eine solches Erkunden und Deuten von Beziehungen und Strukturen und eine damit verbundene relationale Sicht auf Zahlen und Operationen ist aus mathematischer Sicht unerlässlich, um in den nachfolgenden Schuljahren für die elementaren arithmetischen Operationen überhaupt wirkungsvolle Rechenstrategien entwickeln zu können. Kinder sollten folglich bereits in der Grundschule lernen, ein *konkretes Material* zunehmend in seiner Funktion als *Repräsentation mathematischer Strukturen* zu sehen. Hierzu muss das lernende Kind auf der Grundlage seines alten Wissens die repräsentierte mathematische Struktur *aktiv* in das Anschauungsmittel hineindeuten, sie kann nicht einfach und direkt abgelesen werden. Ein Verständnis solch abstrakter Beziehungen und Strukturen entwickelt sich nicht automatisch oder spontan im Unterricht, indem Kinder mit Anschauungsmitteln arbeiten, sie muss explizit erarbeitet werden. Diese Fähigkeit stellt eine anspruchsvolle, aber fundamentale Basiskompetenz des mathematischen Denkens insgesamt dar. Genau hier, in dieser für Kinder anspruchsvollen Fähigkeit liegt das Forschungsinteresse der vorliegenden Studie.

II Strukturen deuten, erkunden und beschreiben – die visuelle Strukturierungsfähigkeit –

Der Schwerpunkt des abgeschlossenen Forschungsprojektes lag in einer *epistemologisch orientierten Analyse* der Wirkungsweise von Anschauungsmitteln für das mathematische Denken von Grundschulkindern. In diesem Kontext wurde untersucht, wie Anschauungsmittel als Erkenntnis-mittel wirken und zwar speziell bezogen auf den besonderen *theoretischen* Charakter des mathematischen Wissens. Vor diesem Hintergrund wurde das theoretische Konstrukt „*visuelle Strukturierungsfähigkeit*“ entwickelt. Es reflektiert die oben dargestellten theoretischen Überlegungen und charakterisiert die kindliche Fähigkeit, aktiv Strukturen in ein Anschauungsmittel hineinzudeuten und zwar in einer Spanne von einer eher *empirischen Sicht* auf das konkrete Objekt, bis hin zu einer *abstrakten Sicht* auf Beziehungen und Strukturen.

Design der Studie

In einer Voruntersuchung wurden zunächst 60 Kinder des 2. Schuljahres mit Hilfe eines Paper-Pencil-Tests¹ untersucht. Im Anschluss hieran folgte die Hauptstudie, in der klinische Interviews mit 15 Kindern des 1. bis 4. Schuljahres durchgeführt wurden (vgl. hierzu ausführlich Söbbeke 2005).

Analyseverfahren

Für die Analyse der Interviews waren zwei Perspektiven zentral:

1.) Ein Anschauungsmittel kann grundsätzlich zwei verschiedene Rollen für das Kind einnehmen: es kann einen *vertrauten Kontext* darstellen, den das Kind nutzt, um sich neue mathematische Begriffe zu erschließen; es kann desgleichen ein für das Kind neues Zeichen/Symbol darstellen, das es mit ihm vertrauteren (beispielsweise arithmetischen) Kenntnissen zu deuten versucht. Im ersten Teil der Interviewanalyse erfolgte aus diesem Grund eine *epistemologisch orientierte Analyse*, in der jeweils herausgearbeitet wurde, ob das Anschauungsmittel die Rolle des vertrauten Referenz-

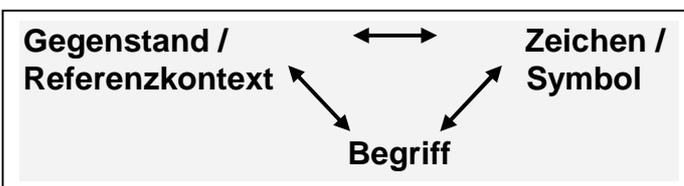


Abb. 3: Steinbring 2005.

kontextes oder die des zu deutenden Zeichen/Symbols einnimmt. Hierzu wurde das von Steinbring entwickelte „*epistemologische Dreieck*“ (vgl. Steinbring 2005, Abb.

¹ Der Paper-Pencil-Test wurde von H. Steinbring im Rahmen eines Comenius-Projektes entwickelt und in einer Praxiskooperation mit drei Lehrerinnen in Form eines informellen Fragebogens eingesetzt. Das Material des Tests wurde für eine erste qualitative Analyse, Theoriebildung und Begriffspräzisierung genutzt.

3) als Analyseinstrument herangezogen (vgl. hierzu ausführlich Söbbeke 2005).

2.) Im Prozess der aktiven Auseinandersetzung von Kindern mit einem Anschauungsmittel zeigen sich Elemente *empirischer* und *strukturorientierter Deutungen* in vielfältigen Mischungen. Diese Herangehens- und Deutungsweisen zu beschreiben, war das zweite Anliegen der Interviewanalyse und erfolgte mit Hilfe eines Kategorienmodells.

Kategorienmodell der visuellen Strukturierungsfähigkeit	
Visuelle Strukturierung	
Deutungselemente	Nutzung der Deutungselemente
Deutung von Einzelelementen	Nutzung der Elemente als konkrete Objekte
Deutung von individuellen Strukturen / Struktureinheiten	Nutzung mit stark zerlegender Gliederung / Strukturierung der Darstellung
Deutung von intendierten Strukturen / Struktureinheiten	Nutzung von Teilaspekten / Teilen der Darstellung
Deutung von Substrukturen	Nutzung von strukturellen Beziehungen zwischen Elementen
	Strukturelle Koordination der Elemente
	Strukturelle Umdeutungen

Abb. 4: Kategorienmodell.

Die Analysekategorien wurden rekonstruktiv aus dem erhobenen Datenmaterial entwickelt und dienen als Indizien für ein empirisches oder strukturorientiertes Herangehen der Kinder. Sie stellen das leitende Fundament der Interpretation dar.

III Ergebnisse

Durch detaillierte Analysen war schließlich eine *Typenbildung* der unterschiedlichen Deutungs- und Erkundungsweisen der Kinder möglich, und es konnten vier verschiedene *Ebenen* der *visuellen Strukturierungsfähigkeit* beschrieben und gegeneinander abgegrenzt werden. Im Folgenden sollen diese vier Ebenen (stark verkürzt) anhand exemplarischer Schülerdokumente erläutert werden.

Ebene I: Ebene konkret empirischer Deutungen

In Phasen, die der *Ebene konkret empirischer Deutungen* zugeordnet werden, fehlt eine strukturelle „Gesamtsicht“ auf das Medium. Es werden keine Strukturen in das Anschauungsmittel hineingedeutet, vielmehr dominiert eine Sicht auf *Einzelelemente* und *konkrete Objekte*, die verbunden ist

mit einer starken Zergliederung der Darstellung. Die Einzelelemente stehen weitgehend isoliert nebeneinander, ohne dass sie strukturell miteinander koordiniert oder in Beziehungen zueinander gesetzt würden. Zudem finden keine echten strukturbezogenen Umdeutungen statt. Das Kind beschreibt das empirisch Fassbare eines Anschauungsmittels, wie etwa die Anzahl der abgebildeten Elemente, und konstruiert hier von ausgehend eine Rechenaufgabe.

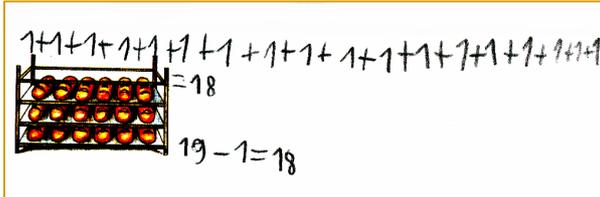


Abb. 5: Miras Aufgabe zur Darstellung.

beschreibt das empirisch Fassbare eines Anschauungsmittels, wie etwa die Anzahl der abgebildeten Elemente, und konstruiert hier von ausgehend eine Rechenaufgabe.

Ebene II: Ebene des Zusammenspiels von partiell empirischen Deutungen mit ersten strukturorientierten Deutungen

In Deutungsphasen dieser Ebene löst das Kind seine Interpretationen partiell von den konkreten Aspekten der Darstellung und richtet seine Aufmerksamkeit vermehrt auf abstrakte Beziehungen und Strukturen.

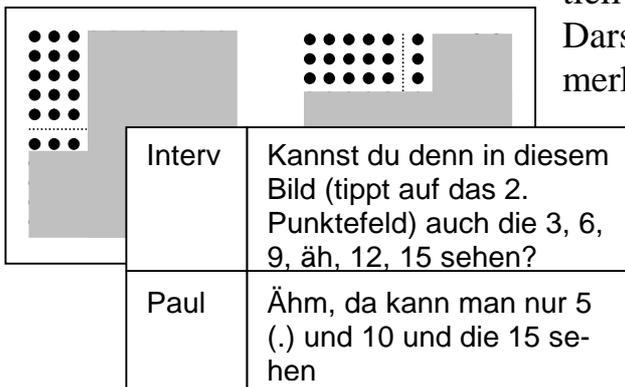


Abb. 6: Paul vergleicht 2 Punktefelder.

Neben Beschreibungen, die sich auf konkrete Eigenschaften des Materials beziehen (hier z.B. die Anzahl der Punkte in den waagerechten Reihen) werden erste *Strukturen* in die Darstellung hineingedeutet, die zum Teil weitgehend isoliert neben-

einander stehen (im 1. Punktefeld nur 3er-, im 2. Feld nur 5er-Reihen). In Ansätzen werden erste Beziehungen zwischen Struktureinheiten gesehen oder diese miteinander koordiniert. Es werden keine strukturellen Umdeutungen expliziert (Paul kann nicht die 3,6,9,12,15 im 2. Feld sehen).

Ebene III: Ebene strukturorientierter Deutungen mit zunehmender, flexibler Nutzung von Beziehungen und Umdeutungen

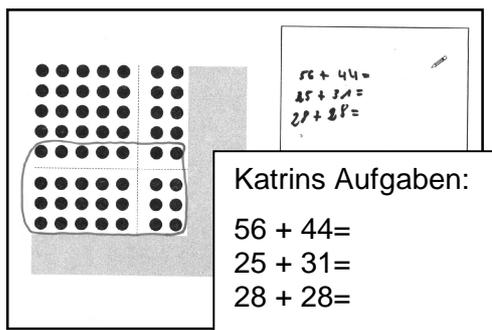


Abb. 7

In Phasen dieser Ebene deuten Kinder aktiv Strukturen in ein Anschauungsmittel hinein, erkunden und beschreiben diese. Hierbei werden verschiedene Aspekte des Datenmaterials in die Überlegungen einbezogen.

Im Vergleich zu der zweiten Ebene werden die Strukturen insgesamt vielfältiger konstruiert und flexibler umgedeutet. Die Struktureinheiten stehen nicht isoliert nebeneinander, sondern werden als Teile des Ganzen gesehen, strukturbezogen zerlegt, zusammengefügt und miteinander koordiniert. Auf dieser Ebene zeigt sich - im Vergleich zur vierten Ebene - keine *umfassende* Sicht auf *vielfältigste* Dimensionen der Darstellung, da z.B. ausschließlich additive Strukturen in die Darstellung hineingedeutet werden.

Ebene IV: Ebene strukturorientierter, relationaler Deutungen, mit umfassender Nutzung von Beziehungen und flexiblen Umdeutungen

Das Kind zeigt eine umfassende Sicht auf vielfältige Dimensionen der

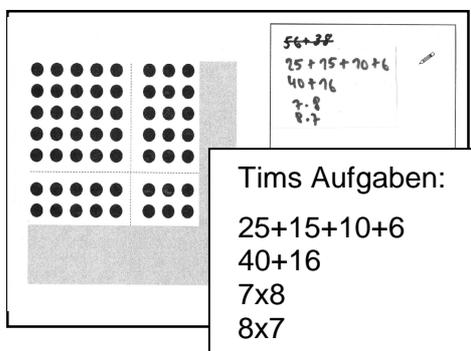


Abb. 8

Darstellung und konstruiert aktiv verschiedenste *Beziehungen* und *Strukturen* in die Darstellung hinein. Es werden *komplexe, umfassende Umdeutungen vorgenommen und begründet*. Die Kinder verweisen in ihren Beschreibungen auf Strukturen sowie Muster und benennen vielfältige alternative Deutungen. In dem

Beispiel finden sich etwa additive aber auch multiplikative Strukturierungen der Darstellung wieder, die weitere Einblicke in mathematische Gesetzmäßigkeiten eröffnen könnten.

Grundverständnis der Nutzung dieses Modells ist, dass die vier Ebenen der visuellen Strukturierungsfähigkeit *nicht* als festgelegte Entwicklungsstufen zu verstehen sind, die in einer vorgegebenen Reihenfolge durchlaufen werden müssten. Die Zuordnung einer kindlichen Deutung zu einer bestimmten Ebene gibt nicht in generalisierender Weise *die* Komplexität der visuellen Strukturierungsfähigkeit dieses Kindes wieder, vielmehr eröffnet sie ein differenziertes Bild, das die *Bandbreite* der Herangehensweisen eines Kindes – ausschließlich bezogen auf den spezifischen Aufgabenkontext und die jeweilige Deutungsphase – beschreibt.

IV. Resümee & Ausblick

1.) Die detaillierten Analysen zeigen eindrucksvoll, dass die verwendeten Anschauungsmittel für die Kinder noch weitgehend unerschlossene Medien darstellten, die erst im Verlauf der Interaktion aktiv einer *neuen* Sinn-generierung unterzogen wurden. Anschauungsmittel werden nicht in einem *traditionellen* Sinne gelernt, indem ihre Bedeutung von der Lehrerin übermittelt und von den Kindern auswendig gelernt wird, vielmehr verändert sich die Deutung von Anschauungsmitteln immer im Kontext ihrer jewei-

ligen Gebrauchsweise und Deutungskultur.

2.) In den Fallstudien - das heißt in der *Kommunikationssituation* des klinischen *Interviews* - zeigten sich keine Deutungen, die ausschließlich Ebene I zugeordnet werden konnten. In der *Gesprächssituation* wurden durch die Kinder immer erste Ideen einer Strukturierung der Darstellung geäußert. Das unter Ebene I vorgestellte Beispiel entstammt dem Paper-Pencil-Test der Voruntersuchung, bei dem das Kind alleine arbeitete, ohne mit anderen Kindern oder der Lehrperson in einem kommunikativen Kontext andere Deutungsmöglichkeiten zu erfahren. Es ist aufgrund dessen zu vermuten, dass die unterschiedlichen Kontexte einen Einfluss auf die Deutungen der Kinder haben. Die impliziten Erwartungen der Kinder, was eine richtige und falsche Deutung oder Bearbeitungen der Aufgabenstellung ist, muss folglich erweitert werden, indem sie durch eine neue Unterrichtskultur erfahren, dass verschiedene Deutungsmöglichkeiten möglich und hilfreich sind, um daran neue mathematische Aspekte zu verstehen.

An diesem Handlungsfeld setzt auch eine neue Interventionsstudie an, in der Aufgabenformate entwickelt, erprobt und evaluiert werden, die Anschauungsmittel selbst zu einem „Thema“ des Unterrichtes machen und die es ermöglichen sollen, gemeinsam mit und über Anschauungsmittel ins Gespräch zu kommen. Durch einen solchen Umgang mit Anschauungsmitteln sollen Kinder nach und nach lernen, dass diese mehr sind als Bilder, die ihnen das Rechnen erleichtern. Durch kindgerechte Gespräche über Strukturen und Beziehungen in einem Anschauungsmittel, kann auch bei Grundschulkindern ein erstes Verstehen der *epistemologischen Idee* von symbolischen Repräsentationen angelegt werden.

Literatur

- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2001): Einführung in die Mathematikdidaktik. Heidelberg, Berlin: Spektrum.
- Söbbeke, E. (2005): Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.
- Steinbring, H. (2005): The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – an Epistemological Perspective, Mathematics Education Library (MELI), No. 38. Berlin, New York: Springer.
- Wittmann, E. Ch. (2003): Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht der Grundschule. In: M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule - Ein Arbeitsbuch. Seelze: Kallmeyer, 18-46.