

Anne SCHÜLLER, Aachen

Visuelle Wahrnehmung: Computergestützte Experimente, mathematische Modelle und Simulationen

Mathematische Modellierung bekommt in der Schule einen immer höheren Stellenwert. Allerdings gibt es dazu wenig authentisches und anwendungsbezogenes Material.

Ziel dieser Arbeit ist es, das Thema „Visuelle Wahrnehmung“ so aufzubereiten, dass authentisches Unterrichtsmaterial mit konkretem Anwendungsbezug entsteht, welches sowohl fächer- als auch jahrgangsübergreifend ist. Weiterhin sollen auch Computerprogramme zur Modellierung mit einbezogen werden, um zum einen den Lerneffekt zu erhöhen und zum anderen das Interesse der Schüler zu wecken und aufrecht zu erhalten.

1. Modellierung des Sehvorgangs

Bereits in der Jahrgangsstufe 5/6 lernen die Schüler im Biologieunterricht den Aufbau und die Funktionsweise des Auges kennen. Stark vereinfacht kann dieser wie in Abbildung 1 dargestellt werden. Das Auge wird als Kreis aufgefasst. Die Funktion der Linse wird durch den Knotenpunkt K übernommen. Am hinteren Teil des Auges befindet sich die Netzhaut. Bei der Tiefenwahrnehmung ist vor allem die Netzhautstelle, auf die die Sehstrahlen eines Punktes treffen von besonderem Interesse. Diese Stelle erhält man durch die Verbindungsgerade des Punktes mit dem Knotenpunkt.

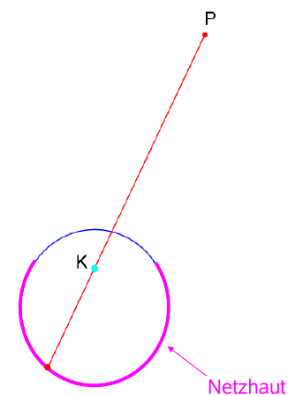


Abbildung 1

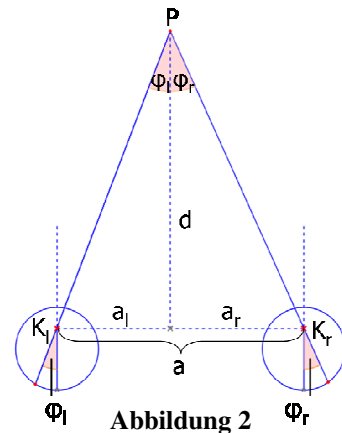
2. Tiefenwahrnehmung

Tiefenwahrnehmung beruht auf mehreren Faktoren. Es gibt Tiefenhinweise, die man bereits mit einem Auge wahrnehmen kann, wie zum Beispiel die Größe von Objekten. Diese Hinweise beruhen allerdings auf Erfahrung und sind daher nicht messbar. Viel intensiver und vor allem auch messbar sind die Hinweise, die nur mit beiden Augen erkennbar sind. Sie kommen dadurch zustande, dass sich die beiden Augen an zwei verschiedenen Positionen am Kopf befinden und dadurch bei der Betrachtung eines Punktes im linken und rechten Auge unterschiedliche Netzhautbilder entstehen. Zur Untersuchung dieser Netzhautbilder und der damit einhergehenden Tiefenwahrnehmung muss das beidäugige Sehen zunächst geeignet modelliert werden.

3. Modell des beidäugigen Sehens

Abbildung 2 visualisiert das Modell des beidäugigen Sehvorgangs.

Beide Augen fixieren einen Punkt im Unendlichen. In der Realität ist dies der Fall, wenn man entspannt geradeaus blickt. Die Sehstrahlen des Fixpunktes, angedeutet durch zwei gestrichelte vertikale Linien, verlaufen bei diesem Modell parallel und treffen die Netzhäute mittig. Der Betrachter nimmt auch weitere Punkte in der Blickrichtung des Fixpunktes wahr, die sogenannten Referenzpunkte. Betrachtet man den Strahlenverlauf eines Referenzpunktes P, so stellt man fest, dass die Netzhautstelle des Bildpunktes im linken und rechten Auge relativ zur



Netzhautstelle, welche zum Fixpunkt gehört, verschieden ist. Die Winkel φ_l und φ_r dienen dabei als Maß für den jeweiligen Abstand. Aus dem Grad der Verschiedenheit der Netzhautbilder kann das Gehirn unter anderem Rückschlüsse über die relative Entfernung des Referenzpunktes bezüglich des Fixpunktes errechnen. Dieses Maß für die relative Entfernung des Referenzpunktes bekommt einen speziellen Namen: die Disparität μ , definiert durch $\varphi_r - \varphi_l$. Der Winkel φ nimmt dabei einen positiven Wert an, falls der Referenzpunkt links vom Fixpunkt auf der Netzhaut abgebildet wird, andernfalls einen negativen. Dieses Modell kann sehr gut mit Hilfe des dynamischen Geometrieprogramms Geonext dargestellt und verdeutlicht werden und erste Beobachtungen können festgestellt werden, wie zum Beispiel, dass die Winkel φ_r und φ_l immer kleiner werden, je weiter der Referenzpunkt vom Betrachter entfernt ist.

4. Themenkreis: Tiefensehen und Geometrie

Ziel bei dem Themenkreis Tiefensehen und Geometrie ist es, eine Abbildung zu untersuchen, die das beidäugige Sehen beschreibt. Dazu wird das kartesische Koordinatensystem zu Hilfe genommen. Dieses wird so festgesetzt, dass die Knotenpunkte symmetrisch auf der x-Achse liegen. Der Referenzpunkt P wird wie üblich durch die x/y-Koordinaten angegeben. Durch Anwendung der Trigonometrie gelangt man zu der Abbildungsvorschrift

$$p: S \rightarrow W$$

$$(x, y) \mapsto \left(\arctan \frac{x + \frac{a}{2}}{y}, \arctan \frac{x - \frac{a}{2}}{y} \right).$$

Diese Abbildung gilt es zu analysieren. Zum Beispiel könnte die Umkehrbarkeit dieser Abbildung, die jedem Punktkoordinatenpaar das

Winkelpaar (φ_l/φ_r) zuordnet, untersucht oder die Disparität zweier Referenzpunkte verglichen werden.

5. Themenkreis: Experiment zum Tiefensehen

Im Folgenden wird ein anwendungsnahe Experiment zum Tiefensehen vorgestellt. Ziel ist es, die individuelle Tiefenwahrnehmung zu messen. Das Experiment für die Tiefenmessung soll am Computer durchgeführt werden, also auf einem ebenen Bildschirm. Der Fixpunkt liegt dementsprechend nicht, wie bei den geometrischen Untersuchungen, im Unendlichen, sondern auf Bildschirmhöhe. Da es sich bei einem Bildschirm um eine Ebene handelt, muss dafür gesorgt werden, dass der Proband auf diesem ebenen Bildschirm eine Tiefe wahrnimmt. Es muss also eine scheinbare Tiefe erzeugt werden. Abbildung 3 visualisiert, wie eine scheinbare Tiefe hervorgerufen werden kann. Das linke Auge sieht den roten (linken), aber nicht den blauen (rechten) Punkt. Analog sieht das rechte Auge nur den blauen, aber nicht den roten Punkt. Das Gehirn verschmilzt diese Punkte miteinander und der verschmolzene Punkt wird entweder hinter (a) oder vor der Bildschirmenebene (c) wahrgenommen. Je weiter dabei die Punkte auseinander liegen, desto größer ist auch die wahrgenommene Tiefe. Der Punktabstand kann nicht beliebig groß gewählt werden, da das Gehirn sonst nicht in der Lage ist, die Punkte miteinander zu verschmelzen.

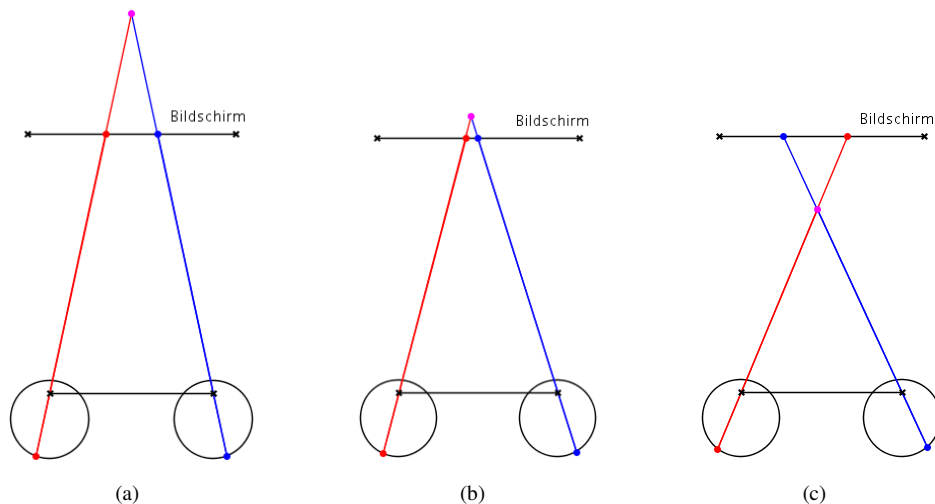


Abbildung 3: (a) Der verschmolzene Punkt wird weit hinter dem Bildschirm wahrgenommen; (b) Der Punkt wird direkt hinter dem Bildschirm wahrgenommen; (c) Der Punkt wird vor dem Bildschirm wahrgenommen

Ein Verfahren, wie man erreicht, dass die Augen verschiedene Punkte wahrnehmen und das Gehirn diese paarweise miteinander verschmilzt, sind Random-Dot-Stereogramme (RDS), wie in Abbildung 4 visualisiert. RDS bestehen aus zwei dichten Feldern von roten bzw. blauen Zufallspunkten. Eine Rot-Blau-Brille sorgt dafür, dass das eine Auge nur die roten und das andere nur die blauen Punkte sieht. Sind beide Felder identisch, so sieht man durch die Brille ein einziges verschmolzenes Bild auf einer ebenen Fläche. Um scheinbare Tiefe mittels RDS zu erzeugen, wählt man einen Bereich aus, z.B. ein Rechteck, in dem alle roten und blauen Punkte horizontal gegeneinander verschoben sind. Die restlichen Punkte außerhalb des Bereichs liegen an der gleichen Position. Der ausgewählte Bereich wird nun entweder vor, oder hinter dem Bildschirm wahrgenommen.

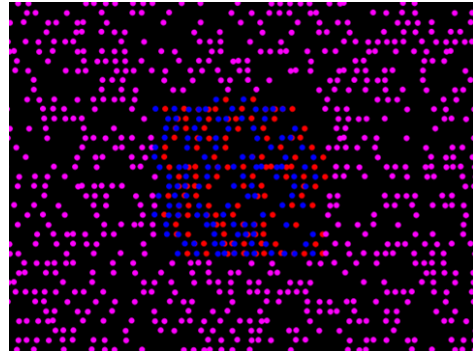


Abbildung 4

Für den Versuchsablauf wurde im Vorfeld ein Applet programmiert. Durch Drücken eines Buttons wird der Versuch gestartet. Der Proband sollte nun die Rot-Blau-Brille aufsetzen. Es erscheinen nacheinander mehrere RDS. Bei jedem Stereogramm muss sich der Schüler entscheiden, ob er das Rechteck vor oder hinter der Ebene sieht, was er durch entsprechenden Tastendruck dem Rechner signalisiert. Wie weit das Rechteck aus der Ebene herauskommt oder in der Ebene liegt, variiert bei jedem RDS, wobei jede Tiefe mehrmals getestet wird, um richtiges Raten auszugleichen. Als Ergebnis erhält man für verschiedene Tiefendarbietungen die relative Häufigkeit, wie oft man richtig entschieden hat.

An die so erworbenen Daten, welche in ein Koordinatensystem eingetragen werden, wird nun eine logistische Funktion angepasst. (Die Wahl der logistischen Funktion geht zurück auf die Schwellentheorie.) Ziel ist es, den kleinsten horizontalen Versatz der Punkte, der zu einer Tiefenwahrnehmung führt, zu bestimmen. Dies entspricht genau dem Wendepunkt der logistischen Kurve, welchen der Proband nach manuellem Anpassen der Funktion an die individuellen Daten ablesen, oder mit aufwendigen mathematischen Verfahren bestimmen kann.

Das Experiment stellt somit eine anwendungsbezogene Optimierungsaufgabe dar.