

Christina ROECKERATH, Aachen

Aktuelle Forschung im Klassenzimmer: Modellierung und Simulation von Populationsentwicklungen

Es ist allgemein akzeptiert, dass Modellieren von fundamentaler Bedeutung für den Mathematikunterricht ist. Dennoch besteht die Arbeit mit Modellen im Unterricht häufig nur aus der Anwendung von Formeln und der Suche nach passenden Parametern. Realitätsbezogenes Unterrichtsmaterial gibt es bisher wenig. Ausgewählte Themen aktueller Forschung in Natur- und Ingenieurwissenschaften können bei sorgfältiger Aufarbeitung hingegen interessantes Unterrichtsmaterial bieten.

Dieser Beitrag stellt Unterrichtsmaterial zur Modellierung und Simulation von Populationsentwicklungen. Die betrachteten Modelle sind authentisch, da sie Ergebnisse aktueller Forschung in der Theoretischen Biologie (Johansson & Sumpter, 2003) sind und eine starke biologische Fundierung haben. Ihre Herleitung basiert auf der Identifizierung und Erfassung der für die Populationsentwicklung relevanten Eigenschaften auf Individuenebene. Diese Art der Modellierung wird "bottom up"-Modellierung genannt. Eine detaillierte Ausführung zu "bottom-up" Modellen und ihren Vorteilen gegenüber den klassischen, häufig im Schulunterricht verwendeten, "top-down"-Modellen findet man bei Sumpter & Broomhead (2001). Obwohl es sich um ein Resultat aktueller Forschung handelt, ist der gesamte Modellierungsprozess für Schüler begreifbar. Das Unterrichtsmaterial ermöglicht die Modellierung und Simulation eine Vielzahl unterschiedlicher Populationen und die selbständige Herleitung passender Modellgleichungen durch die Schüler.

Das im Folgenden vorgestellte Unterrichtsmaterial kann im Mathematik- und Biologieunterricht der Oberstufe eingesetzt werden und steht im Internet zum Download zur Verfügung (Roeckerath, 2008).

Das Modell

Modelliert werden zwei interagierende Arten, die einen gemeinsamen Lebensraum mit beschränkten Ressourcen bewohnen. Beide Populationen haben eine diskrete nicht überlappende Generationenabfolge, wie Insekten oder einjährige Pflanzen. Ein Individuum interagiert mit Individuen seiner eigenen Art (z.B. Konkurrenz um Nahrung, Lebensraum, Licht) und mit Individuen der anderen Art (z.B. Räuber-Beute oder symbiotisches Verhalten). Diese Phänomene heißen intra- bzw. interspezifische Interaktionen und beeinflussen die Reproduktionsfähigkeit der Individuen. Ein reprodu-

tionsfähiges Individuum reproduziert sich genau einmal und verteilt seinen Nachwuchs (z.B. Samen oder Eier) zufällig im Lebensraum.

Johansson und Sumpter (2003) bilden die Entwicklung der Arten von Generation zu Generation im so genannten Kästchenmodell ab. Aufgrund der nicht überlappenden Generationen lässt sich die Populationsentwicklung in diskreten Zeitschritten beschreiben und ist außerdem nur von der Anzahl der Reproduktionen beeinflusst. Der Lebensraum wird als Feld mit endlich vielen Kästchen dargestellt. Jedes Kästchen entspricht einem Bereich des Lebensraumes. Jeder Spezies wird eine Farbe zugeordnet und die Individuen innerhalb eines Bereichs, werden durch Punkte in der entsprechenden Spezies-Farbe im zugehörigen Kästchen abgebildet (Siehe Abb. 1).

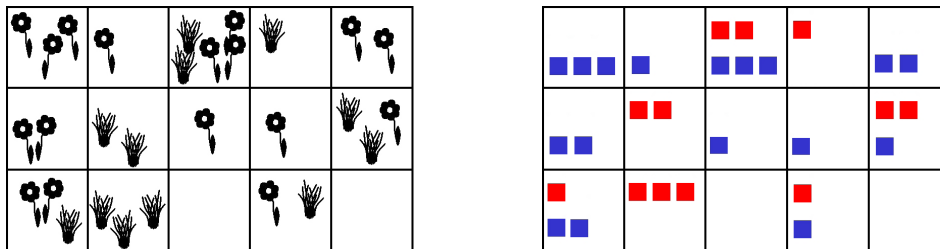
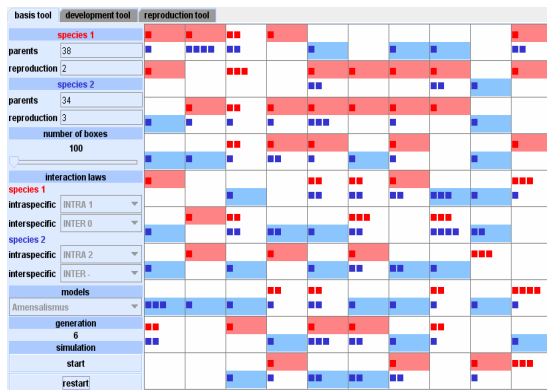


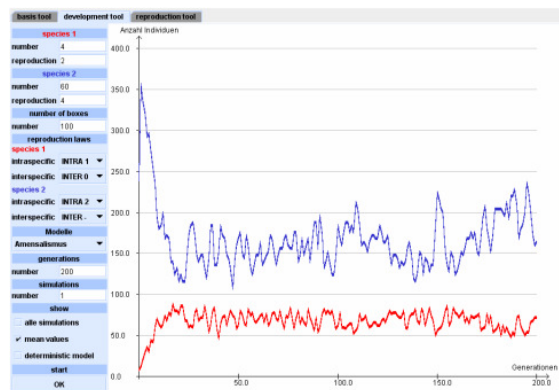
Abbildung 1: Das Kästchenmodell

Da sich Individuen, die im selben Kästchen dargestellt werden, räumlich nah sind, interagieren sie miteinander. Die Interaktionen entscheiden darüber ob ein Individuum reproduktionsfähig wird oder nicht (z.B. wird sich ein Beutetier, welches von einem Räuber gefressen wurde, nicht mehr reproduzieren). Zur Bestimmung der Anzahl an Nachkommen, muss folglich für jedes Kästchen ausgewertet werden, welche seiner Individuen sich reproduzieren können. Da reproduktionsfähige Individuen ihre Nachkommen zufällig im Lebensraum verteilen, wird zur Modellierung der nächsten Generation die entsprechende Anzahl an Punkten zufällig über das Feld verteilt. So lässt sich die Entwicklung der Arten Generation für Generation modellieren. Eine ausführlichere Beschreibung des Kästchenmodells insbesondere bezüglich der modellierbaren Interaktionen findet der Leser im Leitprogramm (Roeckerath, 2008).

Zur Realisierung des Modells als stochastischer Prozess wurde eine Software entwickelt, die die Entwicklung der Populationen mit dem Kästchenmodell simuliert (Abb. 2a) und als Graphen im Koordinatensystem (Abb. 2b) darstellt.



(a)



(b)

Abbildung 2: Die Simulationssoftware

Das Modell bietet eine Grundlage, um auf einfacher Weise eine mathematische Beschreibung für den simulierten Prozess zu entwickeln. Die Anzahlen der Individuen zum Zeitpunkt t seien mit $S_1(t)$ und $S_2(t)$ bezeichnet. Aufgrund der separierten Generationenabfolge, hängt die Änderung der Individuenanzahlen vom Zeitschritt t zum Zeitschritt $t+1$ ausschließlich von der Reproduktion ab. Die Reproduktionsfunktionen $R_1(S_1, S_2)$ und $R_2(S_1, S_2)$ geben an, wie viele Individuen reproduktionsfähig sind, wenn sich S_1 Individuen der einen und S_2 Individuen der anderen Spezies zufällig auf dem Feld verteilen. Die Anzahl der Nachkommen je reproduktionsfähigem Individuum seien durch r_1 für die Spezies 1 und r_2 für die Spezies 2 angegeben. Die Individuenanzahlen der einzelnen Spezies zum Zeitpunkt $t+1$ ergeben sich aus deren Reproduktion zum Zeitpunkt t . Mit den Reproduktionsfunktionen kann eine mathematische Beschreibung der Entwicklung der beiden Arten durch die Differenzgleichungen

$$S_1(t+1) = r_1 R_1(S_1(t), S_2(t))$$

$$S_2(t+1) = r_2 R_2(S_1(t), S_2(t))$$

angegeben werden.

Eine für Schüler nachvollziehbare Herleitung der Reproduktionsfunktion kann auf dem Wege der Simulation durchgeführt werden. Die Simulationssoftware stellt ein Werkzeug zur Verfügung, welches für eine Spezies die Simulation der Reproduktionen bei einer festen Individuenanzahl der einen Spezies und einer variablen Individuenanzahl der andere Spezies durchführt und die resultierende Anzahl an reproduktionsfähigen Individuen in einem Koordinatensystem darstellt. Die entstehenden Graphen nähern die Reproduktionsfunktionen an. Schüler können hier mit diversen bekannten Ansätzen eine passende Funktionsvorschrift finden. Auf einem eher univer-

sitären Niveau lässt sich eine Herleitung der Reproduktionsfunktion mit Mitteln der Stochastik durchführen.

Unterrichtseinsatz

Zum Unterrichtseinsatz wurde ein Leitprogramm (vgl. Frey & Frey-Eiling, 2004) entwickelt. Dabei handelt es sich um ein Heft zum Selbststudium, das alle notwendigen Inhalte, wie Lehrtexte, Anleitungen zum Umgang mit der Software, Übungen, Arbeits- und Experimentieranleitungen, Rechercheaufgaben und Musterlösungen enthält. Die Schüler können zwischen Einzel- und Partnerarbeit wählen und ihr Tempo selbst bestimmen. Es wird nach dem Mastery-Prinzip gearbeitet. Das bedeutet, dass Schüler erst zum nächsten Kapitel übergehen können, wenn sie eine Lernkontrolle bestanden haben. Leitprogramme lassen sich aufgrund der freien Arbeitsweise gut bei heterogenen Gruppen und bei komplexen Inhalten einsetzen. Schüler lernen Selbstorganisation und Selbstständigkeit und dem Lehrer bleibt Zeit für den Einzelnen. Das Leitprogramm und die Simulationssoftware stehen im Internet zum Download zur Verfügung (Roeckerath, 2008).

Im Rahmen eines MINT-Workshops an der RWTH Aachen vom 17. bis zum 20. September 2008 arbeiteten 26 Schüler/innen der Jahrgangsstufe 12 und 13 insgesamt 9 Stunden mit dem Leitprogramm. Eine anschließende Evaluation der Schülerergebnisse und des Workshops ergab, dass die Schüler nicht nur erfolgreich und gerne mit den Modellen gearbeitet haben sondern auch weitergehende Erkenntnisse zur Bedeutung der Mathematik für die Gesellschaft erlangten. Ein Schüler kommentierte die Arbeit mit dem Leitprogramm wie folgt: „Man konnte gut erkennen, wie viel Mathematik in unserem täglichen Leben steckt und wie man das nutzen kann!“

Literatur

- Frey, K. & Frey-Eiling, A. (2004). Allgemeine Didaktik. Arbeitsunterlagen zur Vorlesung, 17. Auflage, Institut für Verhaltenswissenschaft, ETH Zentrum, Zürich.
- Johansson, A. & Sumpter, D.J.T. (2003). From local interactions to population dynamics in site-based models of ecology. *Theoretical Population Biology*, 64, 419–517.
- Roeckerath, C. (2008, 28 Oct). Simulationssoftware und Leitprogramm. <http://www.matha.rwth-aachen.de/de/modellierung/fallbeispiele/interaktion>.
- Sumpter, D.J.T. & Broomhead, D.S. (2001). Relating individual behavior to population dynamics. *Proceedings of the Royal Society B*, 268, 925–932.