

Simone GÖTTLICH, Martin BRACKE, Kaiserslautern

Eine Modellierungsaufgabe zum Thema: „Munterer Partner-tausch beim Marienkäfer“

Wachstums - bzw. Populationsmodelle sind in der Biomathematik weit verbreitet. Ausgehend von einer aktuellen Studie zur Fortpflanzung der zweigepunkteten Marienkäfer-Spezies *Adalia Bipunctata*¹ werden zwei mathematische Modelle vorgestellt, die Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II im Rahmen einer sogenannten Modellierungswoche erarbeitet haben. Der Ansatz der Schüler basiert in beiden Fällen im Wesentlichen auf einer zeitdiskreten Rekursion, wobei ein Ansatz sich mit dem direkten Aufschreiben der Rekursion beschäftigt und der andere aus einer Skizze zum möglichen Verlauf der Populationen hergeleitet wird. Im Folgenden wollen wir nun die Aufgabenstellung präzisieren und auf weitere wichtige Aspekte des Modellierungskreislaufes (Kaiser 1996, S. 68) wie z.B. das Beschaffen von Daten und das Herleiten eines Modells näher eingehen.

1. Das Problem

Im Jahre 2005 wurde in Polen von einer Gruppe von Forschern um Mary Webberley (Universität von Westaustralien, Perth) eine Studie über das Paarungsverhalten von zweigepunkteten Marienkäfern durchgeführt. Die Forscher fanden heraus, dass die Käfer beim Geschlechtsakt eine Milbe übertragen, die innerhalb von drei Wochen zur Unfruchtbarkeit der Weibchen führt. Der Geschlechtsakt findet im Mittel alle zwei Tage statt. Marienkäfer überwintern die kalten Monate und beginnen im Frühjahr mit der Paarung. Ausgehend von einem bestimmten Anfangsbestand waren 20% der Käfer mit dieser Milbe befallen. Nachdem die Paarung im Frühjahr begann, stieg die Befallsrate innerhalb von zwei Wochen auf 80%. In Spitzenzeiten waren sogar über 90% der Insekten infiziert. Trotzdem starben die Tiere nicht aus, weil rechtzeitig nach fünf Wochen die nächste Generation herangereift war, um sich weiter zu paaren und den Gesamtbestand zu erhalten. Diese neue Generation war zunächst gesund, wodurch sich die Anzahl der befallenen Tiere wieder verringerte. Außerdem wird das Paarungsverhalten eingeschränkt, wenn im Sommer die Temperaturen stark ansteigen.

Aufgabenstellung: Können die oben gemachten Beobachtungen mit Hilfe eines mathematischen Modells nachvollzogen werden?

¹ <http://www.wissenschaft.de/wissenschaft/news/258584.html>

Datenbeschaffung: Aufgrund der offenen Aufgabenstellung muss man sich zunächst über das Leben und Paarungsverhalten der Marienkäfer sowie speziell das Eiablageverhalten der Weibchen genauer informieren. Hierbei wird insbesondere das Internet als einfach zugängliche Datenquelle genutzt. Möglich andere Quellen stellen biologische Fachliteratur und Institute an Universitäten dar. Eine erste wesentliche Information ist, dass bei der Fortpflanzung dieser Tiere überraschenderweise 80-90% weibliche Nachkommen hervorgehen, d.h. Männchen müssen sich öfters paaren. Das Verhältnis ist auf symbiotische Bakterien zurückzuführen, die in den Geschlechtszellen der Weibchen leben². Die Käfer überwintern von Oktober bis Ende April und da die Temperatur bei der Paarung eine wesentliche Rolle spielt, fangen die Marienkäfer an, sich Ende März/Anfang April zu paaren. Die Studie wurde in Polen durchgeführt, d.h. man kann man anhand eines Klimadiagramms feststellen, dass Marienkäfer ab einer Temperatur von ca. 10 - 12°C aktiv werden. Ein Weibchen legt im Schnitt 400 Eier im Leben, die in Portionen von 10-20 Eiern abgelegt werden³, von denen jedoch nur 1% überleben. Von der Paarung bis zum Schlüpfen der Larven vergeht eine Zeitspanne von ca. 10 Tagen; 5 Wochen nach Eiablage sind die jungen Käfer geschlechtsreif. Für gewöhnlich leben die Marienkäfer Mitteleuropas etwa ein Jahr lang und sind solange fruchtbar, solange sie sich nicht mit der Krankheit infizieren. Es entstehen zwei bis drei neue Marienkäfer-Generationen pro Jahr.

2. Zwei Modellierungsideen

Bevor man nun versucht, ein möglichst konkretes Modell zu obiger Fragestellung herzuleiten, muss man sich auf wesentliche Annahmen beschränken. Das ist für die Schülerinnen und Schüler in einem Modellierungsprozess oftmals ein schwerer Schritt, denn durch die gemachten Annahmen geben sie nun die Komplexität der Aufgabe vor.

Annahmen: Bei der Suche nach der Wahrscheinlichkeit, mit der eigentlich eine Milbe übertragen wird, findet man keine konkreten Zahlen. Man geht zunächst von einer Übertragungsrate von 100% aus, d.h. eine Neuinfektion ist bei jeder Paarung möglich. Eine weitere wichtige Annahme ist, dass die Paarungen temperaturabhängig sind. D.h. die Paarungszeit schränkt auf einige Monate ein, wobei während der heißen Sommermonate nahezu keine Paarung stattfinden soll.

² <http://lexikon.freenet.de/Zweipunkt>

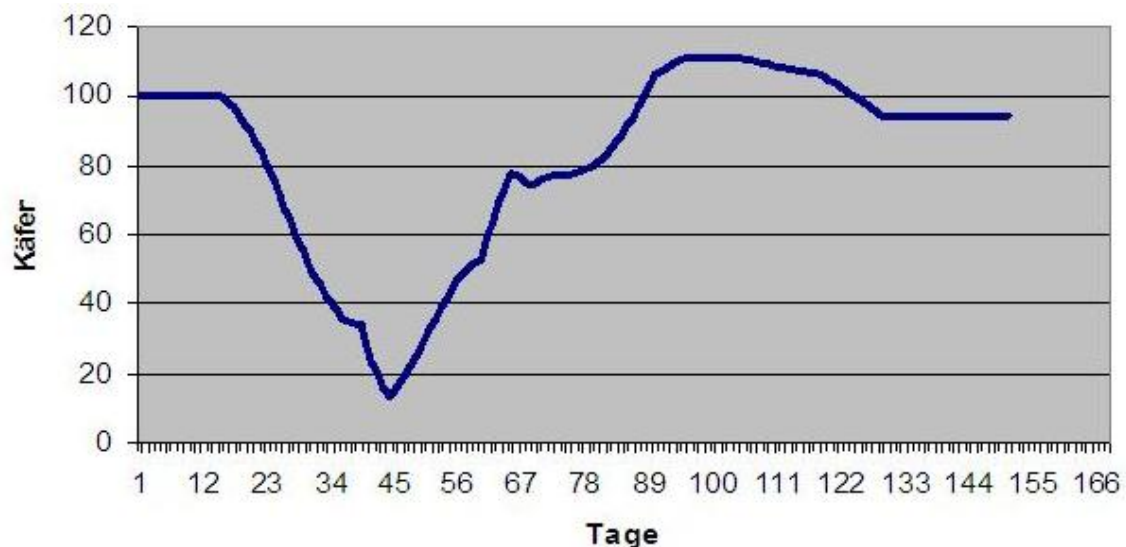
³ <http://www.biologie.de/biowiki/Marienk%C3%A4fer#Fortpflanzung>

Eine erste Möglichkeit, eigentlich auch die naheliegende, ist nun auf direktem Wege ein zeitdiskretes Modell, analog zu Räuber-Beute Modellen oder dem Beitrag von Ch. Ableitinger in diesem Tagungsband, herzuleiten.

Eine Grundannahme ist hierbei, dass Infektionsgrad der gesamten Population sowie ihr Umfang zu Beginn jeder Saison gleich ist. Die Sterberate wird an die in jedem Zeitschritt gelegten Eier gekoppelt mit der Idee, dass in jedem Jahr in denselben Zeiträumen die gleiche Anzahl von Käfern schlüpft. Dabei sterben nur infizierte Käfer, und zwar altersbedingt nach einem Jahr – natürlich im Verhältnis der Geschlechter von 4:1 – mit der Begründung, dass am Ende der Lebensspanne jeder Käfer infiziert ist.

Durch mehrere Experimente mit weiteren Vereinfachungen (Weibchen paaren sich aufgrund des Geschlechterverhältnisses nur alle 8 Tage, Unfruchtbarkeit erst 3 Wochen nach der Infektion) wird schnell klar, dass in einem realistischen Modell männliche Käfer sich entsprechend häufiger paaren als Weibchen und die Inkubationszeit berücksichtigt werden muss. Auch die Infektionswahrscheinlichkeit von 100% führt dazu, dass im Modell zu beinahe jedem Zeitpunkt nahezu die gesamte Population befallen ist und somit ausstirbt.

In einem erweiterten Modell wird mit einem temperaturabhängigen Faktor für die Häufigkeit der Paarungen gearbeitet, der durch eine einfache Treppenfunktion mit 8 Stufen realisiert wird (abgeleitet aus Klimatabellen und Datenfitting).



Des Weiteren wird bei der numerischen Auswertung des resultierenden Modells klar, dass die Infektionswahrscheinlichkeit nur bei etwa 65% liegen kann, um die beobachteten Populationsverläufe nachzubilden. Einen solchen vom finalen Modell prognostizierten Verlauf zeigt obige Grafik.

Durch Variation der Parameter kann man erkennen, dass schon eine Erhöhung der Infektionswahrscheinlichkeit auf 70% – ebenso wie kleine Veränderungen der Dauer der Paarungszeit bzw. -häufigkeit – im Modell zu einem Aussterben der Käferpopulation führen.

Ein von einer zweiten Schülergruppe entwickeltes Modell basiert auf der Annahme, dass jedes Jahr zwei neue Generationen – eine im Frühjahr, die zweite im Herbst – entstehen, wobei die Paarungsphasen klimabedingt in den Monaten Mai und September liegen; alle anderen Zeiträume werden aufgrund einer verhältnismäßig sehr geringen Anzahl gelegter Eier vernachlässigt. Im Unterschied zum ersten Modell wird eine zusätzliche Abnahme der Population über den Winter durch Erfrieren bzw. Fressfeinde berücksichtigt. Nun wird ein aus den Hintergrundinformationen angenommener qualitativer Jahresverlauf der Populationsgröße abschnittsweise durch Funktionen beschrieben. Dabei wird von einer exponentiellen Populationsabnahme durch Tod ausgegangen. Die Zunahme erfolgt bei geringem Infizierungsgrad nach einem linearen Modell und wird bei höherer Infektionsrate durch logistisches Wachstum beschrieben.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass das resultierende Modell die beobachteten Populationsverläufe realistisch beschreibt. Allerdings wurden hierzu vielmehr die Beobachtungen selbst als zugrunde liegende Prozesse berücksichtigt, so dass insbesondere die Prognose für veränderte Umgebungsvariablen kaum möglich wird.

Mögliche Erweiterungen: Das von den Schülern gefundene Modell kann noch in viele Richtungen erweitert werden, z.B. auf die Auswirkungen von Klimaveränderungen auf das Populationsgleichgewicht.

Abschließend sei darauf verwiesen, dass weitere anwendungsorientierte Modellierungsaufgaben und deren Schülerlösungen in den Artikeln Ableitinger et al. 2009/1 bzw. 2009/2 diskutiert werden.

Literatur

- [1] Ableitinger, Ch., Göttlich, S., Sickenberger, T. (2009/1). Eine Modellierungsaufgabe zum Thema "Optimale Auslastung von Flugzeugen". Erscheint bei *Istron*.
- [2] Ableitinger, Ch., Göttlich, S., Sickenberger, T. (2009/2). Kann Papier sprechen? Eine Modellierungsaufgabe zum Thema „Speicherkapazität von 2D Pixel-Mosaiken“. Erscheint bei *Istron*.
- [3] Kaiser, G. (1996). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In: Graumann, G. et al. (Hrsg.): *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*. Franzbecker, Bad Salzdetfurth, S. 66- 84.