Heinz STEINBRING, Essen

Ist es möglich mathematische Bedeutungen zu kommunizieren? – Epistemologische Analyse interaktiver Wissenskonstruktionen

Mathematikunterricht als eine eigenständige Kultur – Welchen Bedingungen unterliegt Kommunikation und kann man ›unsichtbares‹ mathematisches Wissen mitteilen?

Die Rolle des Kulturbegriffs ist für die wissenschaftliche Mathematik und die Schulmathematik von verschiedenen Autoren betont worden (Wilder 1986, Bishop 1988). Wilder (1986) charakterisiert den Begriff von Kultur folgendermaßen: „A culture is the collection of customs, rituals, beliefs, tools, mores, etc., which we may call cultural elements, possessed by a group of people, …“ (Wilder 1986, S. 187). Und: „Without a symbolic apparatus to convey our ideas to one another, and to pass on our results to future generations, there wouldn't be any such thing as mathematics – indeed, there would be essentially no culture at all, since, … culture is based on the use of symbols….“ (Wilder 1986, S. 193).

Mathematische Zeichen und Symbole haben in den jeweiligen – historischen – mathematischen Kulturen eine außerordentliche Bedeutung. In der Unterrichtskultur werden die Schülerinnen und Schüler in den Gebrauch von mathematischen Symbolen eingeführt und mathematische Kommunikationen beziehen sich auf Deutungen mathematischer Zeichen und Symbole.

Probleme für die *mathematische* Unterrichts*kultur*: (1) Kommunikation funktioniert nicht gemäß dem Sender-Empfänger-Modell – Wie wird Kommunikation möglich? (2) Mathematisches Wissen ist nicht konkret greifbar – Wie kann ›unsichtbares‹ mathematisches Wissen interaktiv konstruiert werden?

(1) Der Soziologe Niklas Luhmann charakterisiert »Kommunikation« als den Grundbegriff der Soziologie „… wenn Kommunikation zustande kommen soll, muss ein … geschlossenes … autopoietisches System in Tätigkeit treten, nämlich ein soziales System, das Kommunikationen durch Kommunikationen reproduziert und nichts weiter tut als dies.“ (Luhmann 1996, S. 279)

Das Konzept des ›autopoietischen Systems‹ ist von Maturana und Varela (vgl. z. B. 1987) eingeführt worden. Diese Systeme existieren und entwickeln sich autonom durch ihren selbst-referentiellen Bezug. Sie bestehen aus Komponenten, die im System permanent zum Systemerhalt hergestellt werden. Hiermit werden biologische Vorgänge aber auch soziale und psychische Prozesse charakterisiert.

Wodurch unterscheiden sich soziale und psychische Systeme und wie beziehen sie sich auf einander? Das psychische System basiert auf Bewusstheit und das soziale System basiert auf Kommunikation. „Ein soziales System kann nicht denken, ein psychisches System kann nicht kommunizieren. Kausal gesehen gibt es trotzdem immense, hochkomplexe Interdependenzen“ (Luhmann 1997, S. 28). Wie lassen sich diese Interdependenzen verstehen? „Kommunikationssysteme und psychische Systeme (oder Bewusstsein) bilden zwei klar getrennte autopoietische Bereiche; … Diese beiden Systemarten sind jedoch in einem besonders engen Verhältnis miteinander verbunden und bilden wechselseitig eine »Portion notwendiger Umwelt«: Ohne Teilnahme von Bewusstseinssystemen gibt es keine Kommunikation, und ohne Teilnahme an Kommunikation gibt es keine Entwicklung des Bewusstseins“ (Baraldi, Corsi & Esposito 1997, S. 86).

Wie ist Kommunikation möglich? Nach Luhmann werden wechselweise von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern im kommunikativen System durch *Mitteilungen* (bzw. Handlungen) ›Bezeichnende‹ als Hinweise auf *Informationen* (›Bezeichnete‹) gegeben. Der Mitteilende kann nur ein Bezeichnendes mitteilen, aber das vom Mitteilenden intendierte Bezeichnete, welches dann erst zu einem verstandenen Zeichen führen kann, bleibt offen und relativ unbestimmt; es kann nur vom Mitteilungsempfänger hergestellt werden, indem er selbst ein neues Bezeichnendes artikuliert. Der Empfänger darf das mögliche Bezeichnete *nicht strikt* dem Redner zuordnen, er muss es ›selbst herstellen‹, es entsteht in der sozialen Kommunikation.

(2) Mathematische Begriffe sind keine empirischen Dinge, sondern stellen Beziehungen dar. Raymond Duval erklärt diese Position als den „paradoxical character of mathematical knowledge“: „... there is an important gap between mathematical knowledge and knowledge in other sciences such as astronomy, physics, biology, or botany. We do not have any perceptive or instrumental access to mathematical objects, even the most elementary, ... The only way of gaining access to them is using signs, words or symbols, expressions or drawings. But, at the same time, mathematical objects must not be confused with the used semiotic representations. This conflicting requirement makes the specific core of mathematical knowledge. And it begins early with numbers which do not have to be identified with digits and the used numeral systems (binary, decimal)“ (Duval 2000, S. 61).

Das epistemologische Dreieck stellt ein theoretisches Instrument dar, um dieses semiotische Problem zu behandeln. Man kann mathematisches Wissen nicht auf Zeichen und Symbole reduzieren. Der Zusammenhang zwischen den Zeichen zur Kodierung des Wissens und den Referenzkontexten zur Etablierung der Bedeutung des Wissens lässt sich im epistemologischen Dreieck darstellen (vgl. Steinbring 2005):

Die Beziehungen zwischen den Eckpunkten dieses Dreiecks bilden ein sich wechselweise stützendes und ausbalancierendes System. In der weiteren Entwicklung des Wissens werden durch den Lernenden dann die Deutungen der Zeichensysteme und der gewählten zugehörigen Referenzkontexte modifiziert bzw. verallgemeinert.

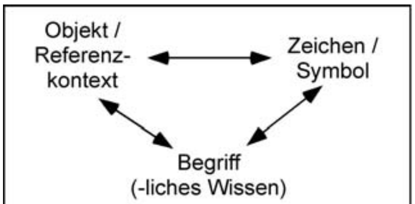

Fig.1: Das Epistemologische Dreieck

Warum scheinen mathematische Kommunikationen im Unterricht trotz der beiden Grundprobleme oft reibungslos zu funktionieren?

Bei der Art seiner Erklärung, die der Schüler Matthi in einer kurzen Beispielszene gibt, um die Erhöhung eines Steines in der zweiten Reihe (abhängig von der Erhöhung des ersten Steines in der ersten Reihe) einer vierstufigen Zahlenmauer zu begründen, benutzt er viele Gesten des direkten Zeigens auf Mauernsteine, des Zeigens mittels Gleiten zwischen Steinen von verschiedenen Mauern, und durch wenige, kurze verbale Äußerungen wie: „Der da“, „und hier“, und „weil der außen ist“. Einen Stein bezeichnet er mit „der ist 10 mehr, weil der 10 mehr ist„.

Mit seinen vielen Gesten und wenigen, knappen verbalen Äußerungen gelingt es Matthi, in situationsgebundener Weise für die vorgegebene mathematische Problemstellung eine zureichende Erklärung zu geben – er kann in dieser Art mathematisch kommunizieren, indem er auf die ›Objekte‹ (Zahlen und Steine) direkt zeigt, er scheint in seiner Kommunikation das von ihm intendierte Bezeichnete direkt kommunizieren zu können und die doch ›unsichtbare‹ Mathematik sichtbar zu machen. Wie ist das möglich?

Durch diese Weise der Kommunikation seines Wissens ›objektifiziert‹ Matthi die Zahlen, Steine und Mauern. Er nutzt sie als Objekte, auf die er zeigt und die er mit einander in Beziehung setzt und vergleicht, indem er sie durch Gesten des Gleitens verknüpft. Durch die Beschreibung »zehn mehr« verleiht Matthi den Steinen eine spezielle – allgemeine – Eigenschaft. Diese Formen der Kommunikation scheinen automatisch und ohne Missverstehen zu funktionieren. Gibt es dann ein ernsthaftes Problem, theoretisches mathematisches Wissen zu kommunizieren?

Die menschliche Kommunikation muss von Mitteln Gebrauch machen, die sich in der Menschheitsgeschichte entwickelt haben. „Auch dort, wo die

Sprache zu ihren höchsten, spezifisch-gedanklichen Leistungen fortschreitet, wo sie, statt Dinge oder Eigenschaften, Vorgänge oder Handlungen zu benennen, vielmehr reine Beziehungen und Verhältnisse bezeichnet, geht dieser rein signifikative Akt über bestimmte Schranken der konkret anschaulichen Darstellung zunächst nicht hinaus. Immer wieder schiebt sich der logischen Bestimmung ein Bild, ein Schema der Anschauung unter" (Cassirer 1990, S. 527).

Die Steine in Matthis Zahlenmauern sind keine realen Steine mehr, sie erhalten eine neue Existenz und eine *geänderte Bedeutung im Rahmen einer mathematischen Struktur*. Die lernenden Schülerinnen und Schüler müssen diese ›Bedeutungs-Verschiebung‹ erkennen – und oft gelingt es ihnen auch unbewusst und ohne jegliche Probleme.

Die konkreten Gegenstände – das greifbare Arbeits- und Anschauungsmaterial z.B. – gewinnen eine neue – eine *symbolische* – Existenz und sie müssen im Rahmen von Mustern, Strukturen und Beziehungen neu gedeutet werden. Die beiden genannten fundamentalen Einschränkungen für die mathematische Kommunikation treten dann zu Tage und wirken sich hinderlich aus, wenn mathematische Kommunikationsprozesse nicht mehr reibungslos verlaufen, sondern auf Grund von Miss-Deutungen kollabieren.

Literatur

Baraldi, C., Corsi, G. & Esposito, E. (1997). *GLU. Glossar zu Niklas Luhmanns Theorie sozialer Systeme.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cassirer, E. (1990). *Philosophie der symbolischen Formen, Band 3: Phänomenologie der Erkenntnis.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24thInternational Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 55 - 69). Hiroshima, Japan: Nishiki Print Co., Ltd.

Luhmann, N. (1997). *Die Gesellschaft der Gesellschaft*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Maturana, H. R. & Varela, F. J. (1987). *Der Baum der Erkenntnis. Die biologischen Grundlagen des menschlichen Erkennens*. Bern, München: Scherz.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective*. Berlin, New York: Springer.

Wilder, R. L. (1986). The Cultural Basis of Mathematics. In T. Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics* (pp. 185 - 199). Boston: Birkhäuser.