Dagmar BERTALAN, Essen

# Die Professoren-Studenten-Aufgabe im Unterricht

„An einer Universität sind p Professoren und s Studenten. Es sind sechsmal so viele Studenten wie Professoren. Beschreibe die Aussage durch eine Gleichung!“ Die Professoren-Studenten-Aufgabe hat in der mathematikdidaktischen Literatur einige Berühmtheit erlangt, da an ihr immer wieder der so genannte Umkehrfehler untersucht und dargestellt wurde, der als Lösung dieser Aufgabe 6s = p produziert. Zum Teil tritt der Umkehrfehler sicherlich aus Unachtsamkeit auf. Seine Häufung und die Resistenz gegenüber Korrekturversuchen (Kaput/Clement 1979, Rosnick/Clement 1980) lassen aber grundlegende Schwierigkeiten mit der algebraischen Formelsprache vermuten. In diesem Beitrag soll anhand eines Fallbeispiels dargestellt werden, wie sich die Aufgabe im Unterricht einsetzen lässt, um Schwierigkeiten aufzudecken und zu klären.

Schon Rosnick und Clement (1980) stellten in Interviews fest, dass Probanden die Buchstaben s und p als Abkürzungen für *Studenten* und *Professoren* anstatt richtigerweise für *Anzahl der Studenten* und *Anzahl der Professoren* verwendeten und damit zur falschen Gleichung 6s = p gelangten. In der Gleichung lasen diese Versuchsteilnehmer dann: sechs Studenten entsprechen einem Professor.[1] Um diese „(Fehl-)Vorstellung zum Gegenstand des Nachdenkens “ zu machen (Kaune 2001, S. 44), wurde die Professoren-Studenten-Aufgabe für unser Unterrichtsprojekt in eine Nimm-Stellung-Aufgabe (ebd.) eingebettet.

> Kevin und Milena haben folgende Aufgabe bearbeitet:
> „An einer Universität sind p Professoren und s Studenten. Es sind sechsmal so viele Studenten wie Professoren.“ *Beschreibe die Aussage durch eine Gleichung!*
>
> Kevin hat die Gleichung p = 6 · s aufgeschrieben und sagt: „Auf einen Professor kommen sechs Studenten.“
> Milena hat die Gleichung 6 · p = s aufgeschrieben. Sie sagt: „s steht für die Anzahl der Studenten und p steht für die Anzahl der Professoren. Man muss p mit sechs multiplizieren, weil es weniger Professoren sind.“
>
> Was haltet Ihr von den beiden Lösungen? Begründet Eure Meinung!

Die Aufgabe wurde von Schülerinnen und Schülern einer siebten Klasse eines Gymnasiums nach Einführung von Variablen, Termen und Gleichungen zunächst in Gruppen bearbeitet, dann im Klassengespräch weiterdiskutiert. Das Klassengespräch soll im Folgenden näher betrachtet werden.

---

[1] Eine Darstellung der verschiedenen in der Literatur beschriebenen Ursachen für den Umkehrfehler sowie eine ausführliche Erörterung der *Objekt-Anzahl-Problematik* findet sich in Bertalan 2007.

Kais Äußerung zu Beginn des Klassengesprächs zeigt, dass die Professoren-Studenten-Aufgabe für Schülerinnen und Schüler einer siebten Klasse durchaus lösbar ist.

Kai: Also, wir glauben auch, dass Milenas richtig ist, weil, ja weil die Anzahl, die komplette Anzahl der Professoren also mal sechs genommen und daraus entsteht dann, wenn man das rechnet, die Anzahl der Studenten. Die Anzahl der Studenten ist halt sechsmal so groß wie die von den Professoren, und deswegen ist das von Milena richtig.

Nach Kais Äußerung vertritt im Klassengespräch zunächst niemand mehr Kevins Lösung. Der Lehrer weist dann aber darauf hin, dass in der Arbeitsphase einige Gruppen gemeint hätten, dass beides richtig sei. Er nutzt hier das Vorhandensein einer falschen Gleichung im Aufgabentext, um die Schülerinnen und Schüler aufzufordern, sich noch einmal mit Kais Begründung, den Lösungsvorschlägen der fiktiven Schüler aus der Aufgabenstellung sowie mit ihren eigenen Gedanken auseinanderzusetzen und sich dazu zu äußern. Peter geht darauf ein.

Peter: [...], aber auf den ersten Blick könnte man ja auch meinen, dass Kevins, also man kann ja jetzt nicht direkt sagen, dass Kevins falsch ist, weil auf den ersten Blick, würde ich jetzt sagen *(deutet mit der Hand auf sich)*, also wenn ich das jetzt mir länger angucke, könnte ich da vielleicht schon was finden, aber auf den ersten Blick sieht das so aus als hätte der Kevin schon irgendwie richtig gerechnet.

Auch diese Äußerung illustriert noch einmal Möglichkeiten, die die Aufgabenstellung in der Diskussion bietet: Peter kann für Kevin sprechen, ohne sich selbst klar zu dessen Lösung zu positionieren. Auf die Nachfrage des Lehrers, warum er meine, dass Kevin auch Recht haben könnte, antwortet er:

Peter: Ja weil da stand ja, ähm, sechsmal so viele Studenten wie Professoren, (.) also Studenten mal sechs (.) rechnen, die Studentenanzahl,

Diese Äußerung könnte man im Unterricht zum Anlass nehmen, um über eine weitere Quelle des Umkehrfehlers zu sprechen, die auch in der Literatur beschrieben und diskutiert wurde (Rosnick/Clement 1980, MacGregor/Stacey 1993): die Übernahme der Wortreihenfolge der Aussage in die Gleichung. Im hier dargestellten Unterrichtsgespräch bringt nun aber Karsten gegen Peters Äußerung einen Einwand hervor.

Karsten: Dann hast Du aber sechsmal so viele Studenten äh Professoren wie Studenten.

Nach einem neuen Diskussionsstrang des Klassengesprächs, an dem weder Peter noch Karsten beteiligt sind, hat Peter eine neue Idee, Kevins Lösung plausibel zu machen.

Peter: Also wenn man für p und s gleiche Zahlen verwenden würde, also sagen wir mal zwei, dann würd’ das schon klappen, weil dann hätte man ja ähm zwei Professoren und zwölf Studenten, das sind ja sechsmal so viele.

Im weiteren Verlauf des Gesprächs führt er dies aus.

Peter: Zwei gleich sechsmal zwei, wären dann zwölf, und dann hätte man sechsmal so viele Studenten wie Professoren.

Der Lehrer fasst Peters Beitrag wie nebenstehend im Kasten dargestellt an der Tafel zusammen. Sogar als die falsche arithmetische Gleichung $2 = 6 \cdot 2$ an der Tafel steht, fällt Peter nichts auf. Er passt die algebraischen Zeichen seinem Ausdruckswillen an – das Gleichheitszeichen, aber auch die Buchstaben. $2 = 6 \cdot 2$ scheint für ihn auszudrücken, dass 2 Professoren $6 \cdot 2$ Studenten gegenüberstehen. Er setzt für p und s zwei ein, obwohl er weiß, dass eigentlich 2/12 ein passendes Zahlenpaar ist, verwendet die Variablen also nicht den Konventionen entsprechend und fügt den in der Literatur beschriebenen Lösungsvorschlägen eine neue Variante hinzu. Es ist wiederum Karsten, der genau dort einhakt.

p = 6 · s<br>
Prof.: 2<br>
Studenten: 2<br>
2 = 6 · 2<br>
2    12

Karsten: Ja, dann kannst Du ja aber jetzt nicht in Studenten zwei einsetzen.

Obwohl Karsten hier richtigerweise Einspruch einlegt, kann er Kevins Lösung in seinen folgenden Wortbeiträgen dann doch etwas abgewinnen, und stellt sie nur noch als die unsicherere von beiden dar. Der Lehrer versucht die Schülerinnen und Schüler dann zunächst zu einem Statement für eine der beiden Lösungen zu bewegen, indem er fragt, ob die Zahlenpaare 2/2 und 2/12 beide in Ordnung wären. Da dies nicht den gewünschten Erfolg hat, sondern nach wie vor beide Lösungen von den Lernenden als plausibel erachtet werden, weist der Lehrer nun expliziter darauf hin, dass die beiden Lösungen verschieden sind und nicht beide richtig sein können, und fordert damit eine Stellungnahme ein. Dann hat noch einmal Karsten eine Idee.

Karsten: [...], das kann eigentlich nicht funktionieren, die vom Kevin, weil p sind ja die Professoren, um die auszurechnen, muss man sechsmal die Anzahl der Studenten nehmen. Dann hätte man, wenn man zwei Studenten hat, hätte man zwölf Professoren, aber die zwei an den Studenten ändert sich ja nichts. [...] und das würd' ja heißen, dass es sechsmal so viele Professoren gibt wie Studenten und das steht ja nicht in der Aufgabe, also kann die gar nicht funktionieren.

Peter gibt Karsten Recht und merkt auch an, dass zwei ja eben nicht gleich zwölf ist.

Peter: [...] das ist keine Gleichung irgendwie vom Kevin. Also das kann man schon ausrechnen, aber das ist keine richtige Gleichung eben.

Im Gespräch wird erarbeitet, dass man eine neue Möglichkeit finden müsste, um das Lösungsverfahren, welches Peter Kevin unterstellt, darzustellen. Der Lehrer wischt zunächst das Gleichheitszeichen in $2 = 6 \cdot 2$ aus und fügt stattdessen als ersten Vorschlag einen vertika-

p = 6 · s<br>
Prof.: 2<br>
Studenten: 2<br>
2 | 6 · 2<br>
2 |   12

len Strich ein (s. Kasten). Peter stimmt dem Lehrer zu, betont am Ende des Gesprächs aber auch noch einmal, dass Kevins Lösung ja so falsch nicht sein könne.

Peter: Ja also, Kevins, also das Ergebnis von Kevins Rechnung, [...] das würd' dann, also zwei und zwölf, würd' dann ja wieder bei Melina klappen, das sind so die Ausgangszahlen für die Rechnung, [...]

## Zusammenfassende Bemerkungen

Im dargestellten Fallbeispiel sind bekannte Ursachen für den Umkehrfehler zu Tage getreten – insbesondere die Anpassung der Deutung algebraischer Zeichen an den eigenen Ausdruckswillen. Die Problematik ist im Unterricht an dieser Stelle also vorhanden und sollte zum Thema gemacht werden. Die zusammenfassende Darstellung des Unterrichtsgesprächs sollte illustrieren, dass und wie Schüler der siebten Klasse sich mit den Schwierigkeiten der Professoren-Studenten-Aufgabe und dem Umkehrfehler auseinandersetzen können. Insbesondere Peters Ringen mit der falschen Gleichung wurde verfolgt. Es wurde deutlich, dass der Sachverhalt für ihn im Gespräch etwas durchsichtiger wurde, auch wenn seine letzte Äußerung vermuten lässt, dass noch Klärungsbedarf bezüglich der Passung zwischen seinem Verfahren und der richtigen Gleichung besteht.

Eine Diskussion der Professoren-Studenten-Aufgabe kann auch anders als durch eine Nimm-Stellung-Aufgabe angestoßen werden. Für die Einbettung spricht aber, dass sie den Umkehrfehler unmittelbar zum Gegenstand der Diskussion macht und Schülern sowie Lehrern Anknüpfungspunkte für die Diskussion liefert.

## Literatur


Bertalan, D. (2007). Buchstabenrechnen? In: Barzel, B. / Berlin, T. / Bertalan, D. / Fischer, A. (Hrsg.): Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker. Hildesheim, Berlin: Franzbecker. S. 27 - 34.

Kaput, J. J.; Clement, J. (1979). Letter to the editor. In: The Journal of Childrens' Mathematical Behavior 2(2). S. 208.

Kaune, Ch. (2001). Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als die „etwas andere Aufgabe". In: Der Mathematikunterricht 47(1). S. 35-46.

MacGregor, M.; Stacey, K. (1993). Cognitive Models Underlying Students' Formulation of Simple Linear Equations. In: Journal for Research in Mathematics Education 24(3). S. 217-232.

Rosnick, P.; Clement, J. (1980). Learning Without Understanding: The Effect of Tutoring Strategies on Algebra Misconceptions. In: The Journal of Mathematical Behavior 3(1). S. 3-27.