Astrid FISCHER, Oldenburg

Vereinfachen von Termen: Imitation von Handlungsroutinen oder gedankliches Durchdringen von Zusammenhängen?

Eine Stärke der algebraischen Sprache ist, dass man mit ihrer Hilfe kontextfrei äquivalente Aussagen erzeugen und so gezielt Veränderungen vornehmen kann. Aber Termumformungen haben für viele Schülerinnen und Schüler ihre Tücken. Oftmals werden Terme rein schematisch umgestellt, ohne dass die Lernenden einen Sinn für die Wirkung und Aussage dieser Transformationen entwickeln. Wenn die Regeln gut gelernt sind, können die betreffenden Schüler bei Standardaufgaben durchaus effektiv arbeiten. Aber wenn Aufgabentypen nicht mehr erinnert werden oder wenn sich Fehler einschleichen, führt diese Form des Lernens zu Hilflosigkeit. Malle (1993) hat eindrückliche Beispiele hierzu aufgeführt.

Hier wird eine kleine Fallstudie vorgestellt, in der ein Fünftklässler, David, mit dem Vereinfachen von einem arithmetischen und einem algebraischen Term beschäftigt ist.

1. Der Kontext der Fallstudie

In einer dreiwöchigen Lernumgebung (vgl. Fischer 2009) haben sich die Schülerinnen und Schüler von vier fünften Klassen mit unterschiedlichen Strukturen arithmetischer Aufgaben beschäftigt. Angeregt wurden sie dazu durch gleichartige Rechenterme und durch zeichnerische Darstellungen in Form von Punktmustern oder Pfeilsequenzen, welche für Aufgaben mit kleinen Zahlen geeignet waren. Die Darstellungsformen wurden im Verlauf der Unterrichtsreihe von den Kindern fortentwickelt, damit auch Rechenaufgaben mit großen Zahlen illustriert werden konnten. Dazu war es notwendig, den Fokus von den absoluten Zahlwerten weg, hin zu den strukturellen Gemeinsamkeiten der Aufgaben zu lenken.

Ein Beispiel einer Aufgabenserie aus dem Unterricht ist:

$(3\cdot5-6):3$; $(3\cdot8-6):3$; $(3\cdot25-6):3$; $(3\cdot47-6):3$; $(3\cdot96378-6):3$; $(3\cdot x-6):3$.

Ausnahmsweise tritt in dieser Serie neben Zahlen- auch ein Variablenterm auf, den der Lehrer zum Anlass nahm, folgende Umformung vorzuführen:

$$
\begin{aligned}
&(3\cdot x-6):3\\
&= 3\cdot x:3 - 6:3\\
&= x - 2
\end{aligned}
$$

Eine Woche nach Beendigung der Unterrichtsreihe wurde ein Einzelinterview mit David geführt. Im nächsten Abschnitt werden Auszüge aus dem zweiten Teil des Interviews erörtert.

Dabei sollen die Fragen erörtert werden:

- Welches Verständnis zeigt David von Transformationen arithmetischer und algebraischer Terme?
- Welche Rolle spielen dabei die Zeichnungen?

2. Davids Versuch, einen arithmetischen Term zu vereinfachen

David wird zunächst gefragt, wie man möglichst einfach das Ergebnis von (117·4+8):4 herausfindet. Er erläutert, dass beginnend mit 117 die Operationen mal, plus und geteilt jeweils auf das vorherige Zwischenergebnis anzuwenden sind. Teile berechnet er, jedoch nicht das Endergebnis.

Nun wird David aufgefordert, mit Hilfe einer Zeichnung einen abkürzenden Rechenweg zu suchen. Er zeichnet zunächst ein Rechteck von 4x6 Rechenkästchen, dessen Seiten er mit „4“ und „117“ beschriftet, ergänzt sodann ein L-förmiges Feld, das 8 Kästchen groß ist und er mit „+8“ kennzeichnet. Anschließend teilt er die Figur in vier (nicht ganz gleich große) Teile. Er erkennt, dass er das Ergebnis der Rechenaufgabe an dieser Zeichnung nicht ablesen kann. Sein Vorgehen beim Zeichnen entspricht ganz dem Vorgehen in seiner Rechnung, jeweils die folgende Operation auf das fertige Zwischenergebnis der Vorhergehenden anzuwenden, ohne dabei die besondere Struktur seiner Entstehung zu berücksichtigen.

Nach einem Tipp der Interviewerin, zunächst zu schauen, was gut geteilt werden kann, teilt David zunächst das Rechteck in vier Streifen, von denen er einen markiert, und anschließend das „L“ in 4 Felder, wobei er ebenfalls eines kennzeichnet (vgl. Abb. 1). Die Frage nach dem Ergebnis der Aufgabe beantwortet er durch Ergänzung der Zeichnung (Abb. 2) und den Kommentar: „Also das hier hier unten dranhängen. Das sind dann 117. 117 plus 2 sind 119.“

David findet hier mit Hilfe seiner Zeichnung zu einer Lösung der Rechenaufgabe. Allerdings gibt es keine Hinweise darauf, ob er auch Einsicht in die besondere Struktur des Rechenterms gewinnt, d.h. ob er die zeichnerischen Vereinfachungen in die Termumformung (117·4+8):4 = 117·4:4+8:4 übersetzt.

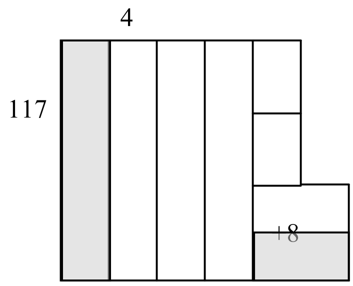

Abb. 1

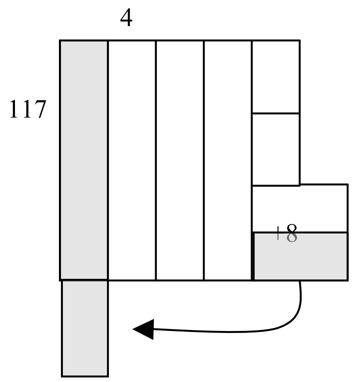

Abb. 2

3. Davids Transformation eines algebraischen Terms

David wird anschließend gebeten, den Ausdruck (x·4+8):4 zu erklären. Er erklärt, dass vier mal x durch vier dasselbe wie x ist und ergänzt, dass dann noch Acht zu addieren ist, was zum Ergebnis x+8 führt. Er notiert diese Überlegung folgendermaßen 4·x:4 = x+8 = x+8.

Er erinnert sich hier offenbar halb an die algebraische Umformung im Unterricht, übersieht dabei jedoch, dass auch die Acht zu dividieren ist. Hinter dem ersten Gleichheitszeichen notiert er das Ergebnis des linken Ausdrucks, dann fährt er fort mit der nächsten Rechenanweisung. Diese führt er nach dem zweiten Gleichheitszeichen aus. Während also der erste Term „x+8“ für eine Handlungsaufforderung steht, noch 8 zu addieren, steht das zweite „x+8“ für das Ergebnis dieser Handlung. Beide Terme gleichen sich zwar in ihrer Form, erhalten aber von David ganz unterschiedliche Bedeutungen.

David wird nun gefragt, ob seine Zeichnung dazu passt. Er verneint, und ergänzt eine zweite Zeichnung, die den Variablenterm illustrieren soll. Dabei orientiert er sich jedoch nicht am gegebenen Term, sondern an seiner formalen Transformation (Abb. 3). Der Vergleich mit der ersten Zeichnung veranlasst ihn auch noch das L-förmige Feld zu vierteln und ein Viertel an das Zwischenergebnis „x“ anzufügen (Abb. 4). Nun fällt ihm auf, dass das Ergebnis der Zeichnung dem zuvor gefundenen Ergebnis „x+8“ widerspricht, und er entscheidet, dass die Zeichnung daher falsch sein muss: Die Zeichnung hat für ihn also keine Überzeugungskraft, sondern er vertraut völlig auf seine formale Transformation. Erst nach deutlichem Infragestellen durch die Interviewerin und dem Hinweis, den ursprünglichen Variablenterm nochmals anzuschauen, erkennt David seinen Fehler und begründet die Antwort anhand der Wirkungen der urspünglichen Operationen.

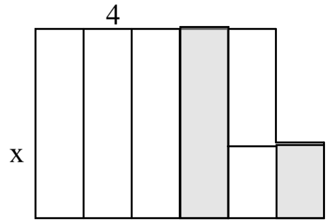

Abb. 3

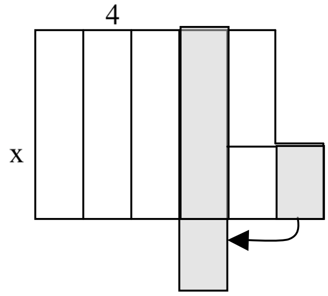

Abb. 4

4. Imitation oder eigenständiges Denken?

Im Umgang mit beiden Termen handelt David zunächst jeweils nach einem starren, (halb) erinnerten Handlungsschema, und überträgt dieses auf seine Zeichnung, ohne seine Bedeutung zu reflektieren. Aus unterschiedlichen Gründen gelangt er jedoch in beiden Fällen nicht zu dem Ziel, das Ergebnis an seiner Zeichnung abzulesen. Nach Hinweisen durch die Interviewerin kann er sich dann von seinem dominierenden Schema lösen und im ersten Fall das Rechenergebnis mit Hilfe der Zeichnung finden, im zweiten Fall Einsicht in die Termstruktur und eine daraus resultierende Vereinfachung gewinnen.

Auf sich gestellt, gelingt es David nicht, die Zeichnungen als Werkzeuge zu nutzen. Hat dies epistemologische Ursachen, die in einer grundsätzlichen Schwierigkeit liegen, die Strukturen eines Terms zu erfassen? Oder liegen die Ursachen in einer unterrichtlichen Konditionierung auf die Nachahmung vorgegebener Verfahren, die zu wenig Wert auf echte Auseinandersetzung mit den Darstellungen legt? Für Grundschulen ist bekannt, dass Anschauungsmittel im Grundschulunterricht nicht selbsterklärend sind, sondern der aktiven Erschließung durch die Kinder bedürfen (Söbbeke 2005).

Literatur

Fischer, A. (2009). Zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen: Zahl- und Variablenauffassungen von Fünftklässlern. *JMD 30(1),* 3 – 29.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme mit der elementaren Algebra.* Braunschweig: Viehweg.

Söbbeke, E. (2005). Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern - epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu visuellen Strukturierungsfähigkeiten mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.