Sandra GERHARD, Frankfurt am Main

Variablen im geometrischen Kontext

Der Vorschlag, Variablen im Zusammenhang mit geometrischen Größen einzuführen, trifft auf geteilte Meinungen. Die Hauptkritik liegt darin, dass die Schülerinnen und Schüler die Variablen als die Objekte selbst und nicht als die Größe der Objekte identifizieren. Im folgenden Beitrag wird das Variablenverständnis von Schülerinnen und Schülern, die Variablen im Zusammenhang mit Größen und Größenvergleichen kennen gelernt haben, einmal näher beleuchtet.

1. Zugang zur Algebra – was, wann und wie?

Wenn über den Zugang zur Algebra gesprochen wird, stellt sich nicht nur die Frage wie, sondern auch die Frage, ab wann Algebra unterrichtet werden sollte und was überhaupt unter Algebra in der Schule zu verstehen ist.

Das vorliegende Forschungsprojekt basiert auf folgenden Ausgangsüberlegungen:

– Traditionell wird Algebra erst nach einer langjährigen Ausbildung als generalisierte Arithmetik in den Schulen eingeführt, aber "children's equation learning difficulties are due […] to children's existing knowledge" (McNeil 2004, S. 938). Für den Algebra-Unterricht bedeutet dies, dass Schülerinnen und Schüler, nicht nur aus dem bisherigen Unterricht, sondern auch von zu Hause aus, häufig die Vorstellung von Mathematik als reines Rechnen, mit z.B. dem Gleichheits- als „Rechne aus"-Zeichen, mitbringen.

– Das Erlernen der algebraischen Symbolsprache ist ein wichtiges Ziel des Algebra-Unterrichts (vgl. Dörfler 2008). Zwar kann Algebra auch ohne Symbolsprache betrieben werden, die Algebraisierung der Mathematik im letzten Jahrhundert bewirkte jedoch enorme strukturelle Vereinfachungen, von denen auch Schülerinnen und Schüler profitieren sollten.

– Schülerinnen und Schüler stellen sich häufig die Frage, warum sie Variablen verwenden sollen, wenn eine Aufgabe doch auch ohne diese lösbar ist. Das liegt daran, dass "algebraic syntax will not be appreciated by students until they have experienced the limits of the scope of their previous knowledge" (Rojano 1996, S. 62). Schülerinnen und Schüler sollten sich also mit Aufgaben auseinandersetzen, die eine Beschäftigung mit der algebraischen Symbolsprache unabdingbar machen.

Die Ausgangsüberlegungen führen zu der Idee, langjährigen Arithmetik-Unterricht ohne algebraische Elemente zu vermeiden und stattdessen nicht nur das algebraische Denken, sondern auch die algebraische Symbolsprache früher zu unterrichten. Da die Schülerinnen und Schüler dann weniger Mathematik-Kenntnisse besitzen, wird das Vorhaben, Schülerinnen und Schüler an die Grenze ihres bisherigen Wissens zu bringen, vereinfacht.

2. Konkret vs. abstrakt

Einer der Gründe, dass der bisherige Einstieg in den Algebra-Unterricht erst ab einem Alter von 11-12 Jahren erfolgt, liegt darin, dass nach Piaget Schülerinnen und Schüler erst ab diesem Alter in die formal-operationale Stufe eintreten. Wird der Unterricht der algebraischen Symbolsprache vorgezogen, stellt sich die Frage, ob die Behandlung der abstrakten Symbolsprache bereits in der konkret-operationalen Stufe möglich ist.

Bei Anderson (2001) wird die konkret-operationale Stufe wie folgt definiert: „Kinder entwickeln eine Reihe mentaler Operationen, die es Ihnen ermöglicht, sich auf systematische Art und Weise mit der physikalischen Welt auseinanderzusetzen." Schülerinnen und Schüler sind also in dieser Stufe in der Lage, nicht nur sensorisch-konkretes Wissen durch Verwendung von konkretem Material, sondern auch integrativ-konkretes Wissen in Form von vernetzten Ideen zu entwickeln (vgl. Clements 1999). Dies beinhaltet auch den gezielten Aufbau von Grundvorstellungen.

Nach Malle (Ohne Datum) ist es unverzichtbar, vor die formal-regelhafte Entwicklung und Einübung eines Kalküls eine inhaltlich-anschauliche Phase zu schalten, die der Entwicklung der nötigen Grundvorstellungen unter Zurückstellung der Arbeit mit Regeln dient. Gleichzeitig kritisiert er, dass diese inhaltlich-anschauliche Phase oft vernachlässigt wird.

3. Ein geometrischer Zugang

Es gibt viele Möglichkeiten, algebraische Sachverhalte geometrisch zu veranschaulichen, wie z.B. figurierte Zahlen. Das vorliegende Forschungsvorhaben basiert auf der Grundidee, Beziehungen von geometrischen Größen symbolisch darzustellen. Dabei wird eine Brücke vom konkreten Größenvergleich zu abstrakten Gleichungen geschlagen (vgl. Gerhard 2008). Die Schülerinnen und Schüler vergleichen konkrete, mit Buchstaben bezeichnete Längen, Flächeninhalte und Volumina, stellen dazu Ungleichungen und Gleichungen auf und interpretieren und manipulieren diese materialgestützt. Durch diesen inhaltlich-anschaulichen Zugang zu Gleichungen ist es möglich, dass die Schülerinnen und Schüler bei einer späteren Begegnung mit Gleichungen auf geometrische Vorstellungen zurückgreifen.

Eine Besonderheit dieses Zugangs liegt darin, dass arithmetische Vorerfahrungen weitgehend ausgeblendet werden, indem zunächst auf die Verwendung von Zahlen verzichtet wird. Der gewählte Zugang ist mit konkretem Material erfahrbar und erweiterbar, wenn mit gerichteten Größen gearbeitet wird, auch auf negative Zahlen. Ein weiterer Vorteil ist, dass die Größen variabel und kontinuierlich sind, was eine Betrachtung der Gleichung unter funktionalen Aspekten ermöglicht. Es bleibt die Frage, wie die Schülerinnen und Schüler Buchstabenvariablen sehen: Als Größe oder als Objekt?

4. Variablenaspekte im geometrischen Kontext

Die Problematik, dass bei einem Zugang zur Algebra über Längen, Flächeninhalte und Volumina die Buchstaben, die eigentlich Größen bezeichnen, von Schülerinnen und Schülern als Bezeichnungen für die Objekte Seite, Fläche und Körper gesehen werden können, findet vielfache Erwähnung in der Literatur (vgl. Bertalan 2008). Küchemann (1978) vergibt an diese Fehlvorstellung einen eigenen Variablenaspekt, indem er „letter as object" dem Aspekt „letter as number" gegenüberstellt. Dazu ein Ausschnitt aus einer Unterrichtssequenz:

Ein Schüler (J), unterstützt von der Lehrkraft (L) soll Cuisenaire-Stäbe aneinanderlegen und Aussagen über die Länge der gelegten Stäbe treffen.

J: Also nennen wir die ganz kleinen grauen U. Das hier ist ein U.

L: So, dann kannst du ja mal alle benennen.

J: A ist immer das größte. B, das blaue ist fast so groß, oder?

L: Welchen Buchstaben geben wir denn zum Beispiel dieser Länge?

J: Ähm, den niedrigsten, den niedrigsten Buchstaben hiervon, welches.. äh.. welcher ist denn das niedrigste?

Zunächst scheint sich hier zu bestätigen, dass Buchstaben von Schülerinnen und Schülern leicht als Bezeichnungen für Objekte missverstanden werden. Der Schüler J benennt mit den Buchstaben die Objekte, in diesem Fall die Cuisenaire-Stäbe. Allerdings erfolgt die Benennung nicht willkürlich. Vielmehr macht der Schüler die Benennung von der Größe, in diesem Fall von der Länge des Objektes abhängig.

Die Variablen werden hier weder als Zahlen noch als reine Objekte betrachtet. Vielmehr handelt es sich hier um einen Zwischenaspekt, die Variablen stehen für Objekte mit einer bestimmten Eigenschaft, in diesem Fall für Stäbe mit bestimmter Länge. In diesem Zusammenhang kann auch für eine Metonymie gesprochen werden, die Buchstaben stehen für den Repräsentanten der Größe, den Stab, der wiederum für die Größe selbst steht.

Griesel (1981) schreibt hierzu:

„Eine Größe wie z.B. ¾ m läßt sich als solche nicht vorstellen, wohl aber ihr Repräsentant, in unserem Fall Strecken der Länge ¾ m. Insbesondere für ein inhaltliches Denken und für eine intuitive Begründung von mathematischen Zusammenhängen sind solche Vorstellungen unerläßlich." (Griesel 1981, S. 9)

5. Ausblick

Auch wenn die Schülerinnen und Schüler die Buchstaben nicht als Bezeichnung für die reinen Objekte sehen, bleibt die Frage offen, ob die Sicht auf Buchstaben als Bezeichnung für Objekte mit bestimmten Eigenschaften für die Ausbildung einer tragfähigen Grundvorstellung zum Umgang mit Gleichungen eher von Vorteil oder eher hinderlich ist. Die Klärung dieser Frage wird im Rahmen des Forschungsprojektes weiter verfolgt.

Literatur

Anderson, J.R. (2001). *Kognitive Psychologie*. 3. Aufl. Heidelberg; Berlin: Spektrum, Akad. Verlag.

Bertalan, D. (2008). Buchstabenrechnen? In B. Barzel et al. (Hrsg.), *Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker* (S. 27 - 34). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Clements, D.H. (1999). ´Concrete` Manipulatives, Concrete Ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, Vol. 1, No. 1,* 45 – 60.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: comments and reflections, *ZDM 40(1),* 143 - 160.

Gerhard, S. (2008): Algebra in der Grundschule – Von konkreten Größenvergleichen zu abstrakten Gleichungen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*, Hildesheim: Franzbecker.

Griesel, H. (1981). 20 Jahre moderne Didaktik der Bruchrechnung. *Der Mathematikunterricht, 27, Heft 4,* 5 – 15.

Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School, 7(4),* 23 - 26.

Malle, G. (Ohne Datum). Grundvorstellungen im Mathematikunterricht. Verfügbar über http://imst2.uni-klu.ac.at/materialien/_design/s1_m_ grundvorstellungenmatheunterricht_150104. pdf (Datum der Einsichtnahme: 29.03.2009).

McNeil, N. (2004). Don't teach me 2 + 2 equals 4: Knowledge of arithmetic operations hinders equation learning. In K. Forbus et al. (Hrsg.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Conference of the Cognitive Science Society*, (S. 938 – 943). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Rojano, T. (1996). The Role of Problems and Problem Solving in the Development of Algebra. In N. Bednarz et al. (Hrsg.), *Approaches to algebra* (S. 55 - 62). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.