Astrid FISCHER, Oldenburg; Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Essen

Zur algebraspezifischen Ausprägung mathematischer Denkhandlungen

To think is to forget differences,
to generalize, to abstract.
(Borges 1989, zitiert nach Arcavi 1994)

In unseren Überlegungen gehen wir davon aus, dass mathematische Denkoperationen spezifische Ausprägungen bzw. Idealisierungen allgemeiner menschlicher Denkhandlungen sind (Wille 2001 im Anschluss an Kitcher 1984). Harel unterscheidet in diesem Zusammenhang „mental acts“ and „ways of thinking“ (Harel 2008). Mental acts bezeichnen allgemeine Denkhandlungen, die überall im menschlichen Denken eine Rolle spielen, ways of thinking sind bereichs- oder disziplinspezifische Ausprägungen von diesen (ebd.). Danach können wir das Anliegen unseres Vortrages so präzisieren: Wir möchten allgemeine Denkhandlungen ausweisen, die auch in der Algebra eine Rolle spielen, und ihre algebraspezifischen Ausprägungen charakterisieren.

1. Strukturieren

„Im Denken wiederholt oder strukturiert sich … eine (‚objektiv’) gegebene Wirklichkeit:“ (Mittelstraß 1995, Stichwort ‚Denken’). Strukturieren gehört also zu den reflexiven Akten, mittels derer das Denken seine „Orientierungs- und Konstitutionsleistungen“ (ebd.) erbringt.

In der Algebra liegt ein besonderer Fokus auf dem Erfassen und Darstellen von Strukturen. Durch Symbolisches Beschreiben von Rechenschemata und Gesetzmäßigkeiten werden Strukturen in Zahl- und Größenbereichen explizit gemacht. Es können sogar Muster und Strukturen konstituiert werden, z. B. wenn eine Folge durch Festlegen eines Bildungsgesetzes erschaffen wird.

2. Abstrahieren und Generalisieren

Unser Denken ist auf das Bilden abstrakter Begriffe und Beziehungen und das Lernen von Allgemeinem aus.

> „Betrachten wir den einfachen Fall. Sie haben sicherlich in Ihrem Leben schon tausende Tomaten gesehen bzw. gegessen, können sich jedoch keineswegs an jede einzelne Tomate erinnern. Warum sollten Sie auch? Ihr Gehirn wäre voller Tomaten! Diese wären zudem völlig nutzlos, denn wenn Sie der nächsten Tomate begegnen, dann nützt Ihnen nur das, was Sie über *Tomaten im Allgemeinen* wissen, um mit dieser Tomate richtig umzugehen.“. (Spitzer 2002, S. 75 f.)

Das Allgemeine als das „allen Gemeinsame“ ist notwendig abstrakt, denn Abstraktion bedeutet, Gegenstände bzw. Sachverhalte in einer bestimmten Hinsicht als gleich zu betrachten; dabei wird von als unwesentlich erachteten Merkmalen abgesehen und als wesentlich erachtete Merkmale werden hervorgehoben. Insofern gehören Abstrahieren und Generalisieren eng zusammen.

Algebra ist speziell darauf gerichtet, Allgemeinheit zu erfassen und zum Ausdruck zu bringen. Formeln beschreiben mit symbolischen Mitteln das allen Fällen der betrachteten Art Gemeinsame. So stellt zum Beispiel die Volumenformel für die Pyramide das für alle Pyramiden in gleicher Weise bestimmende Gefüge der Größen Grundkreisradius und Höhe dar.

3. Darstellen

Denken ist häufig auf Darstellungen angewiesen. Darstellungen (Sprache, Skizzen, Symbole) materialisieren Gedanken und machen sie zugänglich für die Sinne (R. Fischer 2003).

Die Algebra bedient sich besonderer Darstellungssysteme. Sie sind symbolisch, hoch konventionalisiert und regelgeleitet. Es sind formale Darstellungen, die es erlauben, inhaltsgebundene logische Schlüsse durch inhaltsinvariante symbolische Manipulationen zu ersetzen (Cohors-Fresenborg 2001). Dabei stehen Variable als uneigentliche Ausdrücke (Metonymien) für spezielle mathematische Objekte (Zahlen, Größen, …); man arbeitet mit ihnen „als ob“ sie Zahlen, Größen, … wären. Auf diese Weise wird die Allgemeinheit der Ausdrucksweise möglich.

4. Konstruieren

Denkinhalte beschreiben und strukturieren nicht nur die Realität, sie haben auch den Charakter von Entwürfen (Heidegger 1962). In Gedanken entwerfen wir, als was wir einen bestimmten Ausschnitt der Wirklichkeit betrachten wollen. Deshalb werden Begriffe, die Grundeinheiten des Denkens, als Konstrukte betrachtet.

Das Erkennen von Strukturen und Gesetzmäßigkeiten, die mit Mitteln der Algebra beschrieben werden, kann für sich bereits als konstruktive Tätigkeit gelten. Darüber hinaus können in der Algebra neue Objekte und Zusammenhänge symbolisch erschaffen werden. Das zeigen die folgenden Beispiele:

- $\sqrt{-1}$: Ein neues Objekt wird durch symbolische Repräsentation erzeugt (eine Form von Reifikation).

- Prinzip der Permanenz formaler Gesetze: Das Bedürfnis nach Fortführung bestehender Gesetze verleiht Ausdrücken wie (-1)·(-1) eine wohl bestimmte Bedeutung.
- Axiomatische Grundlegung algebraischer Strukturen: Ein mathematisches Gebiet wird zum Zweck des globalen Ordnens durch ein Regelsystem konstituiert. Das Verhältnis von Beschreiben und Definieren kippt um.

5. Argumentieren und Beweisen

Das Argumentieren und Begründen macht einen wesentlichen Teil menschlicher Rationalität aus, wenn wir unter Rationalität die Fähigkeit verstehen, Verfahren des begrifflichen und systematisch begründend oder kritisierend vorgehenden Denkens und Redens über Geltungsansprüche zu entwickeln und verfügbar zu haben. Der Beweis als schlüssige Argumentation für eine Aussage spielt in der Mathematik eine besondere Rolle.

In der Algebra können Deduktionen allein durch Umformungen vorgenommen werden. Die Herleitung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen durch geeignete Umformungsschritte mit Hilfe der quadratischen Ergänzung liefert Darstellung und Begründung zugleich. Das bedeutet, dass man mit Hilfe der algebraischen Formelsprache „Rezeptwissen“ und „Begründungswissen“ in Einem erzeugen kann; sie dient nicht nur dazu, bestimmte Probleme zu lösen, sondern auch dazu, die Allgemeingültigkeit der Lösungsverfahren zu demonstrieren (Krämer 1988, S. 71 f.).

Fazit

In der Algebra werden allgemeine Denkhandlungen in bestimmter Weise zugespitzt, idealisiert oder sogar radikalisiert, wenn radikal bedeutet: bis auf die Wurzel, bis zum Äußersten gehend.

Das mag ein Grund sein, warum Algebra einerseits so effizient, andererseits aber auch für Lernende zunächst fremd und schwer ist und warum sie die Einen durch ihre Klarheit besticht und für Andere zuweilen auch rätselhaft und bedrohlich bleibt.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E.: Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. In: Der Mathematikunterricht 47 (1), 2001, S. 5-13.

Fischer, R.: Reflektierte Mathematik für die Allgemeinheit. In: Hefendehl-Hebeker, L. & Hußmann, St. (Hrsg.): Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie. Festschrift für Norbert Knoche. – Hildesheim: Franzbecker 2003, S. 42 - 52.

Harel, G.: DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction: Focus on Proving, Part I. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 40, 2008, 487–500.

Heidegger, M.: Die Frage nach dem Ding. Tübingen: Niemeyer 1962.

Kitcher, Ph.: The nature of mathematical knowledge. New York, Oxford: Oxford University Press 1984.

Krämer, S.: Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung im geschichtlichen Abriss. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1988.

Mittelstraß, J. (Hrsg.): Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie. Band 1. A – G. Stuttgart, Weimar: Metzler, korr. Nachdruck 1995.

Spitzer, M.: Lernen. Gehirnforschung und die Schule des Lebens. Heidelberg, Berlin: Spektrum 2002. Lizenzsausgabe für die Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Wille, R.: Mensch und Mathematik, Logisches und mathematisches Denken. In: Lengnink, K. / Prediger, S. / Siebel, F. (Hrsg.): Mathematik und Mensch. Sichtweisen der allgemeinen Mathematik. Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft 2001, S. 141 - 160.