

Diemut LANGE, Hannover

Auswahl von Aufgaben für eine explorative Studie zum Problemlösen

Im Folgenden wird eine Möglichkeit aufgezeigt, Aufgaben *für* eine Studie zusammenzustellen, d.h. aus einer Vielzahl von Aufgaben¹ diejenigen auszuwählen, die für die geplante Studie in Frage kommen und dabei gleichzeitig andere Aufgaben auszuschließen.

1. Die Studie

Ausgewählt werden sollten Aufgaben für eine explorative, hypothesengenerierende Studie zur Untersuchung von Problemlöse- und Interaktionsprozessen mathematisch verschieden begabter Fünftklässler. Die aufgrund zweier Eingangstests eingeladenen Fünftklässler hannoveraner Gymnasien sollten ohne jegliche äußere Intervention in Paaren in 45 bis 60 Minuten Aufgaben bearbeiten. Um anschließend eine annähernd objektive Auswertung zu ermöglichen, wurden die Aufgabenbearbeitungsprozesse mitprotokolliert und per Videokamera bzw. Diktiergerät aufgezeichnet.

Daraus leiten sich folgende studienspezifische Kriterien an die Auswahl ab:

- Die Vorkenntnisse zu Beginn der fünften Klasse (lt. Kerncurriculum) sollten für die Bearbeitung der Aufgaben ausreichen. Der Erwerb unbekanntem mathematischen Wissens sollte nicht untersucht werden.
- Die Aufgaben sollten auch für mathematisch begabte Kinder eine "Problemhaltigkeit" bzw. "Problembarriere" (Dörner, 1979) beinhalten².
- Um Hypothesen hinsichtlich der Problemlöse- und Interaktionsprozesse mathematisch verschieden begabter Fünftklässler generieren zu können, sollten möglichst "vielfältige" Problemaufgaben ausgewählt werden. Die Kennzeichnung einer Aufgabenzusammenstellung als "vielfältig" setzt zum einen die Möglichkeit voraus, Aufgaben hinsichtlich bestimmter Merkmale charakterisieren zu können. Zum anderen beinhaltet eine solche Kennzeichnung die Möglichkeit, zwei Aufgaben hinsichtlich eines bestimmten Merkmals als vergleichbar oder als verschieden anzusehen.

Die Vagheit der Formulierungen ("Problemhaltigkeit"; "Vielfältigkeit") erschwert die Operationalisierung der Kriterien für die Aufgabenauswahl. Um die Aufgabenauswahl so weit wie möglich nachvollziehbar und repro-

¹ Als Quellen für Aufgaben kamen für diese Studie Aufgabensammlungen und Knobelbücher, Wettbewerbe und Olympiaden in Frage. Weitere Anregungen boten Aufgaben, die an mathematisch begabten Kindern erprobt sowie Aufgaben, die für andere empirische Untersuchungen zum mathematischen Problemlösen ausgewählt wurden.

² In Folgenden werde ich von Problemaufgaben sprechen.

duzierbar zu machen, sollen diese vage formulierten Kriterien im Folgenden weiter präzisiert werden.

2. Präzisierung der studienspezifischen Kriterien

Die Kennzeichnung einer Aufgabenzusammenstellung als "vielfältig" setzt eine Beschreibungsmöglichkeit von Problemaufgaben voraus. Auf der Grundlage bereits existierender Klassifikationen stellt Neubrand (2002) ein umfassendes, eigenes Klassifikationsschema für mathematische Aufgaben zusammen, das m.E. eingeschränkt auch auf die für diese Studie zur Auswahl stehenden Problemaufgaben angewandt werden kann.

Unter den "in einer Aufgabe niedergelegten objektiven Kennzeichen" bzw. dem "Potential einer Aufgabe" (S. 91) versteht Neubrand (2002) diejenigen Aufgabenmerkmale, "die ein Experte beim Beurteilen und Lösen der Aufgabe einschätzen kann" (S. 138). Bezogen auf die für diese Studie in Frage kommenden Aufgaben kann auf diese Weise das *Stoffgebiet*, der *Problemlösecharakter* sowie das *heuristische Potential* der Aufgaben eingeschätzt und zur Kennzeichnung der Aufgabenvielfalt herangezogen werden. Dazu ein für die Studie ausgewähltes Aufgabenbeispiel:

2.1 Kennzeichnung eines Aufgabenbeispiels

Bei der folgenden Kombinatorikaufgabe³ soll aus der Quadratanordnung auf einem Schachbrett auf die Gesamtzahl der vorhandenen Quadrate geschlossen werden.

Ach ja, das Schachbrett...

Peter spielt leidenschaftlich gerne Schach. Er spielt so gerne Schach, dass seine Gedanken auch dann um das Spiel kreisen, wenn er gerade gar nicht spielt.

Neulich stellte er sich die Frage, wie viele Quadrate wohl auf einem Schachbrett zu finden sind.

Versucht, Peters Frage zu beantworten!

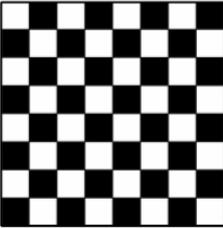


Abb. 1: Die Schachbrettaufgabe [Quelle: Mason et al., 2006]

Demzufolge ist der Anfangszustand der Aufgabe vorgegeben, nicht jedoch der Zielzustand und der Weg, diesen zu erreichen. Bruder (2000) spricht in diesem Fall von einer "Problemaufgabe". Je nachdem, ob Voraussetzungen, der Lösungsweg oder zu berechnende Werte bekannt, genannt, bereits vorgegeben sind oder nicht, unterscheidet Bruder (2000) acht verschiedene

³ Da die ausgewählten Aufgaben mit den Vorkenntnissen zu Beginn der fünften Klasse lösbar sein sollten, kamen die folgenden *mathemat. Stoffgebiete* für die Aufgabenauswahl in Frage: Geometrie, Zahlentheorie (mit Arithmetik), Logik, Mengenlehre und Diskrete Mathematik (Kombinatorik, Graphentheorie).

Aufgabenarten, d.h. Möglichkeiten, den *Problemlösecharakter* einer Aufgabe zu beschreiben. Da in der Studie Problemlöseprozesse untersucht werden, die Aufgaben jedoch innerhalb von 45 bis 60 Minuten von Fünftklässler lösbar sein sollten, schienen im Rahmen der Studie lediglich drei Aufgabenarten mittleren Offenheitsgrades (vgl. Leuders, 2003) geeignet⁴.

Die Schachbrettaufgabe kann unter Verwendung unterschiedlicher heuristischer Strategien gelöst werden: Zum einen ist ein vorwärtsgerichtetes, auf die Gesamtfigur schließendes Vorgehen, zum anderen ein rückwärtsgerichtetes, von der Gesamtfigur ausgehendes Vorgehen denkbar⁵.

Bruder (2000) zählt neben Strategien (Vorwärts-, Rückwärtsarbeiten, Suche nach Mustern) auch Prinzipien und Hilfsmittel zu den *Heurismen*. Diese sind i. A. jedoch an die Strategien gekoppelt⁶, so dass die Strategien als Grundlage dafür genommen werden können, ob zwei Lösungsprozesse ein und derselben Aufgabe hinsichtlich der verwendeten Heurismen miteinander vergleichbar oder voneinander zu unterscheiden sind⁷.

2.2 Kennzeichnung der Aufgabenvielfalt

Dementsprechend können zwei verschiedene Aufgaben dann als unterschiedlich betrachtet und voneinander abgegrenzt werden, wenn sie sich

- verschiedenen *mathematischen Stoffgebieten* zuordnen lassen **und/oder**
- verschiedenen *Problemlösecharakteren* zuordnen lassen **und/oder**
- mit Hilfe verschiedener *heuristischer Strategien* lösen lassen

Die folgende Tabelle lässt die Vielfalt der für die Studie ausgewählten Aufgaben⁸ erkennen. Zudem gibt sie Aufschluss über mögliche Aufgabengruppierungen: Beispielsweise können die Problemlöseprozesse aller Kombinatorikaufgaben (in Abb. 3 **schwarz gestrichelt** markiert) bzw. die Prozesse der Aufgaben, die mit Hilfe der Strategien Vorwärtsarbeiten und Suche nach Mustern gelöst wurden (**schwarz** markiert) miteinander verglichen und Prozessen anderer Aufgaben gegenübergestellt werden⁹.

⁴ Für die Auswahl geeignet erschienen die Aufgabenarten "Begründungs- oder Beweisaufgabe bzw. Strategiefindungsaufgabe", "Problemaufgabe" und "Umkehrung einer Problemaufgabe" (Bruder, 2000).

⁵s. Langfassung: www.idmp.uni-hannover.de/lange/downloads/

⁶ Bei der Schachbrettaufgabe kann beim Vorwärtsarbeiten das Rückführungsprinzip, beim Rückwärtsarbeiten das Symmetrieprinzip ausgemacht werden.

⁷ Hier liegt die Annahme zugrunde, dass zwei Problemlöse- bzw. Interaktionsprozesse nicht miteinander verglichen werden können, sofern die Schülerpaare die Aufgabe auf "unterschiedliche" Weise lösen.

⁸ Die Schachbrettaufgabe ist in der Tabelle als Aufgabe [2] dargestellt. Der Zusatz "a" und "b" bezieht sich auf die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten (vgl. Kategorisierung der heurist. Strategien).

⁹ An dieser Stelle wird eine systematische Variation des Aufgabenparameters vorgenommen (vgl. Einleitungstext von Th. Gawlick zu dieser moderierten Sektion).

Aufgabennummer	mathematisches Stoffgebiet	Bruder			Heuristische Strategien				
		A	T	Z	sP	M	V	R	kVR
[1]	Arithmetik	x	-	-				x	
[2]a	Kombinatorik	x	-	-		x	x		
[2]b	Kombinatorik	x	-	-		x		x	
[3]a	Kombinatorik	x	-	-		x	x		
[3]b	Kombinatorik	x	-	-		x		x	
[4]a	Kombinatorik	x	-	-		x	x		
[4]b	Kombinatorik	x	-	-		x		x	
[5]a	Zahlentheorie	x	-	-	x	x	x		
[5]b	Zahlentheorie	x	-	-	x	x	x		
[6]	Zahlentheorie	x	-	-		x			
[7]a	Zahlentheorie	x	-	-	xM	x	x		
[7]b	Zahlentheorie	x	-	-	xM		x		
[8]	Kombinatorik	x	-	-		x			
[9]a	Arithmetik	x	-	x			x		
[9]b	Arithmetik	x	-	x				x	
[9]c	Arithmetik	x	-	x					x
[10]a	Arithmetik	x	-	-	x				
[10]b	Arithmetik	x	-	-		x			x
[11]a	Geometrie	x	-	-			x		
[11]b	Geometrie	x	-	-				x	
[12]a	Geometrie	x	-	-		x	x		
[12]b	Geometrie	x	-	-		x		x	
[13]a	Arithmetik	-	-	x	x				
[13]b	Arithmetik	-	-	x			x		
[13]c	Arithmetik	-	-	x				x	
[14]a	Arithmetik	x	-	-	x		x		
[14]b	Arithmetik	x	-	-	x			x	
[14]c	Arithmetik	x	-	-	x				x
[15]	Kombinatorik	x	-	-		x		x	

Legende:
sP = system. Probieren
M = Muster erkennen
V = Vorwärtsarbeiten
R = Rückwärtsarbeiten
kVR = kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten

2,3,4,12

2,3,4,8
15

Abb. 3: Klassifikation von 15 der insgesamt 26 für die Studie ausgewählten Aufgaben

3. Zwei abschließende Bemerkungen

Die auf diese Weise gekennzeichnete "Vielfalt" einer Aufgabenzusammenstellung bezieht sich auf die Einschätzung des Aufgabenpotentials durch Experten im Vorfeld einer Aufgabenbearbeitung (vgl. Neubrand, 2002). Inwiefern die an der Studie teilnehmenden Fünftklässler etwa die heuristischen Strategien der Experten angewandt haben, muss geprüft werden.

Die vorgenommene Kennzeichnung der Aufgaben berücksichtigt die Anlage dieser Studie. Sollten beispielsweise keine Problemaufgaben zur Auswahl stehen oder die Aufgaben nicht für eine explorative Studie ausgewählt werden, müsste das beschriebene Vorgehen geeignet modifiziert werden.

Literatur

- Bruder, R. (2000): Akzentuierte Aufgaben und heuristische Erfahrungen. In: Flade, L. & Herget, W. (Hrsg.): *Lehren und Lernen nach TIMSS. Anregungen für die Sekundarstufen*, (S. 69-78), Berlin: Volk und Wissen Verlag.
- Leuders, T. (2003): Problemlösen. In: Leuders, T. (Hrsg.): *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*, (S. 119-135), Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2006): *Mathematisch denken. Mathematik ist keine Hexerei*, 4. überarbeitete Auflage, München: Oldenbourg Wissenschaftsverlag.
- Neubrand, J. (2002): *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie*, Hildesheim: Franzbecker.