Hans-Joachim BRENNER, Erfurt

Das Elementarisierungs- und Trivialisierungsproblem im Mathematikunterricht

Erfolgreiches Lernen von Mathematik erfordert Möglichkeiten, sich die inneren Zusammenhänge der mannigfaltigen Tatsachen erarbeiten zu können und „das Wesen der Mathematik, das besonders in ihren Beweismethoden zutage tritt“ (Naas/Tutschke 1986, S. 3), kennenzulernen. Es ist „ein argumentatives Unterrichtsklima zu schaffen, in dem Begründungen mathematischer Aussagen und rationale Argumentationen selbstverständlich sind.“ (Reiss 2002, S. 30) In meinem Beitrag zeige ich damit zusammenhängende Probleme auf und unterbreite Vorschläge.

1. Mein Anliegen

Defizite und Probleme des Mathematikunterrichts wurden vielfach untersucht und benannt (z.B. Borneleit 2000). Ich möchte verstärkte Aufmerksamkeit zum einen auf das Problem der Entgeometrisierung (Arnold 1997; im Folgenden gehe ich nur auf Defizite bei der Nutzung von Methoden der analytischen Geometrie ein; bezüglich der elementaren Geometrie sind sie noch größer) und Algebraisierung der Schulmathematik und zum anderen auf die Vernachlässigung des theoretischen Lernens (Brückner 2008) lenken und die bekannten Vorschläge durch neue Überlegungen ergänzen. Dabei lasse ich mich auch von Jahnkes Bemerkungen (Jahnke 2008) leiten: „Hence, to understand the essence of mathematical proof we need to overcome the limits of everyday thinking. … Instead of simply denying the procedures of everyday thinking we should create situations in which students can make substantial experiences with checking the generality of statements. Thus, we would propose to have an interplay of empirical work and theoretical argumentation rather than telling our pupils that in mathematics we don‘t bother about empirical reality.” Trotz der vielen Bemühungen, dem Argumentieren/Begründen/Beweisen gebührende Aufmerksamkeit zu schenken (siehe auch Wittmann/Müller), hat sich die Situation nicht wesentlich verbessert. Nach wie vor sind erhebliche Anstrengungen diesbezüglich nötig. Mein Augenmerk liegt dabei auf der Erarbeitung von geistigen Werkzeugen für diese Tätigkeiten, um ein Verständnis der Zusammenhänge zu ermöglichen („Wie kommt das?“ Walsch 1992).

2. Begriffserklärungen

Unter dem *Elementarisierungsproblem* verstehe ich die mangelnde Vielfalt bei der Wahl der Begründungsgrundlage für mathematische Sachverhalte im Mathematikunterricht und dem daraus erwachsendem ersten Aspekts des *Trivialisierungsproblems*, womit ich die oft sinnentleerte Reduzierung der Bestätigung von Aussagen durch *algorithmisches Umformen algebraischer Terme* meine. (Man vergleiche z.B. die Herangehensweise bei der Einführung der Produkte von Vektoren in hiesigen Schulbüchern mit dem in [1].) Der zweite Aspekt des Trivialisierungsproblems, den ich ansprechen möchte, ist der *durch unzureichende Förderung und Forderung des theoretischen Lernens zu eng begrenzte Bereich mathematischer Aktivitäten der Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe II*.

3. Ausgangspunkte

In ihrer Expertise sprechen Borneleit et. al. (Borneleit 2000, S. 6) bezüglich der traditionellen Unterrichtspraxis von einer einseitigen (zumindest impliziten) Orientierung an der Grunderfahrung G2 (Winter 1996), die zur systematischen Vernachlässigung der anderen beiden Grunderfahrungen führte. Dieser Einschätzung ist entgegenzuhalten, dass gerade beim Ermöglichen von lokalem deduktivem Denken erhebliche Defizite bestehen. *Größeres Augenmerk sollte der Herleitung von Eigenschaften mathematischer Objekte und deren tatsächliche Nutzung in Argumentationen gelten*.

Danckwerts und Vogel (Danckwerts 2006, S. 5) stellen fest, dass die Kalkülorientierung der Analysis naturgemäß algebraintensiv ist und sehen die Tendenz der Vernachlässigung von echten Anwendungen und heuristischem Arbeiten vor allem als Reflex auf die Schwierigkeiten, die dem mathematischen Gegenstand der Analysis innewohnen. Dem Genannten möchte ich hinzufügen, dass noch stärker anschauliche Begründungen und Herleitungen sowie die Erarbeitung von Begriffen und Methoden anhand von physikalischen Problemen in die Diskussion gebracht werden sollten. Und weiterhin, dass die Fähigkeit des Deduzierens im Modellbildungsprozess an Bedeutung gewinnt (und nicht verliert, S. 198). Insgesamt ist den Herleitungen von mathematischen Aussagen mehr Aufmerksamkeit zu schenken.

4. Beispiele zum Problem der Elementarisierung

Ich bemühe mich, Beispiele vorzustellen, von denen ich hoffe, dass Kolleginnen und Kollegen bereit sind, sie für ihren Unterricht aufzugreifen.

(1) Gegeben ist ein Problem, das zu der Gleichung $x + x : 2 = 2160$ führt (bevor effektive Algorithmen erarbeitet wurden). Der Schüler sollte sich anhand von geeigneten Aufgaben erarbeitet haben, dass der linke Term folgende *Eigenschaft* hat $f(a+b) = f(a) + f(b)$. Mithilfe dieser Eigenschaft (Additivität) und der Methode des falschen Ansatzes wird die Lösung ermittelt. Der Sachverhalt wird dabei auch „durch geometrische Bilder belebt“ (Klein 1911, S. 105) – zum Beispiel durch Streifen fester Breite und variabler Länge. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus Monotonieüberlegungen. Bei der Lösung von Gleichungen sollte

die Beantwortung von Fragen im Vordergrund stehen. Wie kann ich eine Lösung ermitteln? Gibt es noch mehr Lösungen? Wie kann man *zeigen*, dass alle Lösungen gefunden wurden? Die Erarbeitung von Algorithmen ist ein wichtiges Ziel der Mathematik, aber nur bedingt eines des Mathematikunterrichts. Und die Anwendung von Algorithmen (was *muss* ich tun?) ist in erster Linie eine Tätigkeit für Computer.

(2) $\sin(4x) - \sin(x) = 0$. Bei der Lösung werden die *Symmetrieachsen des Graphen* (bzw. des Einheitskreises) und die Periodizität der Funktion genutzt. Man zeichnet den Graphen der Sinusfunktion in mehreren Perioden, wählt sich ein Argument x und zeichnet die Strecke ein, deren Länge den Sinuswert repräsentiert (also $P(x;0), Q(x;\sin x)$). Jetzt sucht man (auf all das und andere Wege kommen die Schüler ganz allein) weitere Argumente, die den gleichen Funktionswert besitzen. Können diese Argumente das Vierfache des gewählten Arguments sein? Wenn das stimmt, dann müssen x und $4x$ zum Beispiel symmetrisch zu $\pi : 2$ liegen, also $(x + 4x) : 2 = \pi : 2$. Welche Lagen sind noch möglich? Haben wir wirklich alle Lösungen gefunden? Möglichkeiten zur Diskussion und Argumentation ergeben sich, wenn ein Algorithmus eben unbekannt ist.

(3) Lösen einer Extremwertaufgabe: Gesucht sind die Maße eines Balkens mit rechtwinkligem Querschnitt bei fester Diagonalenlänge (Höhe *h*, Breite *b*, Diagonalenlänge *d*), wenn die Tragfähigkeit maximal sein soll (Keunecke 2008). $y = f(h,b) = h^2 \cdot b \to \max, \text{wenn } h^2 + b^2 = d^2$ Den üblichen Lösungsmethoden und dem *f'*, *f''*- Algorithmus sollten folgende Überlegungen vorangehen, wobei die Argumentation auf der *Nutzung der Eigenschaften der Parabel und Hyperbel* beruht. Wird $z = h^2$ substituiert (man erhält besonders einfache Funktionen; ohne geht es genauso gut), so folgt $b = y : z$ und $b = \sqrt{d^2 - z}$, wobei y als Konstante angenommen wird. Im *z*-*b*-Koordinatensystem sind die Graphen Hyperbeln (für verschiedene y-Werte, wobei auch Hyperbeln mit im konkreten Beispiel nicht erreichbaren Werten eingezeichnet werden) bzw. eine Parabel.

Die Bedeutung der einzelnen Kurven und Schnittpunkte bzw. der nicht vorhandenen Schnittpunkte von Hyperbeln mit der Parabel ist zu klären. Notwendig für das Annehmen des extremalen Wertes ist die Berührung der Kurven (weil …). Aus der Gleichheit der Anstiege der Tangenten und unter Beachtung von $y_0 = z \cdot b$ folgt, $z = h^2 = 2b^2$. Die ersten Überlegungen dieser Art haben die Schüler in Klasse 9 bei isoperimetrischen Problemen kennengelernt. (Man kann die verallgemeinerbaren Überlegungen fortführen - Lagrangesche Multiplikatoren.)

5. Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten

In den Diskussionen zum konstruktivistischen Lernen ist dem dialektischen Verhältnis von Lehren und Lernen zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt worden. „Der Konstruktivismus verabschiedet sich von der Hoffnung auf Wahrheiten und objektive Resultate. Wenn der Konstruktivismus eine Relationstheorie ist, sind in der Tat neue Perspektiven, nicht aber eindeutige Antworten zu erwarten.“ (Arnold/Siebert 2006) Stärkere Beachtung sollte finden, dass Lerntätigkeit und ihre Ausbildung „kein rein individuelles Phänomen ist und nicht spontan – sozusagen aus sich heraus – entsteht, sondern als Bestandteil der gesellschaftlichen Kultur vom Individuum selbst angeeignet werden muss … Eine Form oder Variante einer so verstandenen Tätigkeits- und Ausbildungsstrategie haben wir als Aufsteigen vom Allgemeinen zum Konkreten bezeichnet.“ (Lompscher 2000). Die Lehrstrategie besteht aus zwei wesentlichen Schritten: „Die erste ist die Ausbildung der sogenannten Ausgangsabstraktionen, die zweite ist das Studium konkreten Lehrstoffs mit Hilfe dieser Abstraktionen entsprechend den Lernzielen und –inhalten so weit, wie die Ausgangsabstraktion trägt.“ (Lompscher 1996) Besondere Bedeutung kommt der aktiven Ausbildung der Ausgangsabstraktion zu. Sie dient als Orientierungsgrundlage zur Aufdeckung des Wesentlichen bei unterschiedlichen Erscheinungen. Dabei ist es auch möglich, dass „der (abstrakte) Begriff vorangestellt ist, der Lernende „entleiht“ ihn sich der Wissenschaft. Er nutzt ihn bei der Erarbeitung und Bearbeitung des Konkreten. Dadurch wird ausgehend vom theoretischen Begriff sein Inhalt erschlossen durch die Übertragung auf das Konkret-Praktische.“ (Brückner 2008) Als Beispiel dafür sehe ich das Unterrichtskonzept zur Einführung in die Integralrechnung von M. Pratusevich (Der MU, 2/2008, S. 25-32) an. „Ohne Beweis wird die Tatsache mitgeteilt, dass krummlinige Trapeze, die durch stetige Funktionen begrenzt werden, einen Flächeninhalt haben, der *die üblichen Eigenschaften hat*. … Auf der Grundlage des Flächenbegriffs wird nun bewiesen, dass der Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes als Funktion des rechten Randes der Figur eine Stammfunktion zur Ausgangsfunktion ist.“ In diesem Zusammenhang ist auch L. Führers Forderung nach mehr „Top-down-Ansätzen“ zu beachten.

Literatur

Alexandroff, Markuschewitsch, Chintschin (1969), Enzyklopädie Elementarmathematik

V.I. Arnold, On teaching mathematics, http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html

J. Lompscher 2000, http://www2.hu-berlin.de/leibniz-sozietaet/bildung/lompscher.htm

J. Lompscher 1996, http://de.scientificcommons.org/joachim_lompscher

A. Brückner 2008, http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/new/index_f-bzmu.html