

Astrid BRINKMANN, Münster

Die schönsten Mathematikaufgaben – Ein Projekt zum Jahr der Mathematik 2008

1. Projektidee und -durchführung

Zur Vermittlung, Übung oder Festigung vieler mathematischer Inhalte oder Fähigkeiten eignen sich verschiedene Aufgaben. Warum sollte man also nicht solche wählen, die gefallen?

Das Jahr der Mathematik 2008 diente als Anlass zum Projekt „Gesucht: Die schönsten Mathematikaufgaben“, im Rahmen dessen Aufgabenfavoriten von Schüler/innen zusammengetragen wurden. Hierfür sind Lehrer/innen in Deutschland dazu aufgerufen worden, z. B. am Ende des Schuljahres, ihre Schüler/innen zu fragen, welche der im Unterricht behandelten Mathematikaufgaben diese am schönsten fanden. Die Rückmeldungen der Schüler/innen sollten unter Angabe der Schule, der Schulform, der Klassenstufe, des verwendeten Schulbuchs sowie weiterer verwendeter Materialien an die Projektleitung (Astrid Brinkmann, Universität Münster) eingeschickt werden.

Die Projektziele und Erwartungen waren:

- a) lokal (für einzelne Lerngruppen bzw. auf der Ebene einzelner Schulen):
 - Sensibilisierung von Mathematiklehrenden und auch –lernenden für die Betrachtung des Aspekts der mathematischen Ästhetik
 - Einholen von Sichtweisen der Lernenden
 - Einfluss auf eine zukünftig motivierendere Unterrichtsgestaltung
 - Einfluss auf das Bild von Mathematik, das Lernende haben
- b) auf Projektebene:
 - Forschungsinteresse:
 - Gibt es einen gewissen Konsens bzgl. dessen, was Schüler/innen (einer bestimmten Altersstufe und/oder Schulform) als schöne Mathematikaufgaben angeben?
 - Entstammen die angegebenen Aufgaben eher dem verwendeten Schulbuch oder eher zusätzlich verwendeten Unterrichtsmaterialien?
 - Wie verteilen sich die genannten Aufgaben auf die mathematischen Inhaltsbereiche (Geometrie, Algebra, Stochastik, ...), die in der Schule behandelt werden?
 - Lassen sich bestimmte gemeinsame Charakteristika der genannten Aufgaben ausmachen, d. h., kann man Merkmale für die Ästhetik finden?
 - Welche Aufgabenkontexte werden bevorzugt?
 - Welche Aufgabentypen sind besonders beliebt?

- Veröffentlichung der zusammengetragenen Ergebnisse als Sammlung schönster Aufgaben
- Berücksichtigung der Ergebnisse bei der Gestaltung von Unterrichtsmaterialien, insbesondere von Schulbüchern (Idealfall)

Die Bekanntmachung des Projekts und der damit verbundene Aufruf zum Einsenden schönster Aufgaben erfolgten über verschiedene Schienen. Insbesondere wurde über das Projekt durch einen Flyer (<http://www.math-edu.de/SchoeneAufgaben-I.pdf>) informiert, der u. a. auch an ca. 450 Schulen im Regierungsbezirk Münster verschickt wurde. Informationen erfolgten ferner in der MNU-Zeitschrift, auf diversen Internetseiten zum Jahr der Mathematik, über eine Rundmail an die GDM-Mitglieder, auf verschiedenen Veranstaltungen für Mathematiklehrer/innen. Eine Meldung über das Projekt durch die dpa hatte zur Folge, dass in vielen deutschen Zeitungen sowie einigen Zeitschriften über das Projekt berichtet wurde. Des Weiteren ist ein Wettbewerb, „Wer kennt hübsche Aufgaben?“, durch die Westfälischen Nachrichten (Tageszeitung) ausgelobt worden, mit Prof. Dr. A. Beutelspacher als Jurymitglied und attraktiven Preisen für die besten Einsendungen (1. Preis: Fahrt zum Mathematikum in Gießen für eine Schulklasse). Das Projekt ist im Rahmen des Wettbewerbs „Mathe erleben“, ausgelobt vom BMBF, mit einem Preis ausgezeichnet worden; Berichte über diesen Preis lieferten gleichzeitig ebenfalls Hinweise auf das Projekt.

Die vielfältige Öffentlichkeitsarbeit und vor allem die Pressemeldungen haben dazu geführt, dass nicht alle Einsendungen der zunächst gewünschten Norm entsprachen. Viele Einzelpersonen, vor allem Eltern, Rentner, Hochschullehrer, haben durch ihre Beiträge die Sammlung der Aufgabenfavoriten von Schüler/innen ergänzt. Auch sind die Aufgaben nicht immer mit dem Attribut „schön“ versehen worden, sondern mit verwandten Eigenschaften wie interessant, spannend, hübsch, nett, beste Aufgaben. Die Angabe der Quelle, aus der die Aufgaben entnommen wurden, fehlt auch oft.

2. Vorgeschichte und begleitende Studien

In der Literatur wird Ästhetik als richtungweisendes Element im mathematischen Denken und Arbeiten hervorgehoben (Brinkmann 2006); eine neue Interview-Fallstudie zeigt, dass das Schönheitsempfinden auch heute in kreativen Arbeitsprozessen namhafter Mathematiker oft eine große Rolle spielt (Brinkmann & Sriraman 2009). Der Gedanke liegt daher nahe, dass auch Schüler/innen im Unterricht mathematische Schönheit erfahren und schätzen lernen sollten. Hierbei könnte auch eine langfristig positive Einstellung zur Mathematik aufgebaut werden. Diesem Unterrichtsziel wird aber international noch wenig Bedeutung zugemessen.

Erste Untersuchungen zum mathematischen Schönheitsempfinden von Schüler/innen sind dem hier vorgestellten Projekt vorangegangen (vgl. z. B. Brinkmann 2006), weitere wurden im Jahr 2008 durchgeführt bzw. begonnen, teils im Rahmen von Bachelor-Arbeiten am IDM der Universität Münster (A. Kampmann, K. Koop, A. Gerick, F. Schrameyer). Insgesamt wurden mehr als 1.500 Schüler/innen der Sekundarstufen aus Schulen verschiedener Schulformen befragt, wobei u. a. Charakteristika schöner Aufgaben aus Schülersicht mittels Auswahllisten (mit zugelassener Mehrfachauswahl) und Freitextangaben erkundet wurden, und auch, was für Aufgabentypen als schön empfunden werden. Ferner wurden die Schüler/innen aufgefordert, Beispiele für schöne Aufgaben aufzuschreiben, so dass u. a. auch untersucht werden konnte, welche mathematischen Inhaltsbereiche in diesem Zusammenhang bevorzugt vorkommen, und auch Hinweise auf ansprechende nichtmathematischen Inhalte geliefert wurden.

3. Kennzeichen schöner mathematischer Aufgaben

In der Literatur nennen Mathematiker bzw. Naturwissenschaftler als besondere Charakteristika schöner Aufgaben: Einfachheit, Klarheit, Eleganz, Vernetztheit/Komplexität, Ordnung aus dem Chaos, Struktur, Symmetrie / unvollkommene Symmetrie, Überraschungseffekt. Für Schüler/innen kommen weitere Aspekte zum Tragen, mit unterschiedlicher Gewichtung.

Die in Abschnitt 2 aufgeführten Studien haben ergeben, dass für etwa 80% der befragten Schüler/innen Aufgaben mit einem *interessanten Thema* schön sind. Ein weiteres Kriterium von Bedeutung ist eine gewisse Kombination von Komplexität und Einfachheit der Aufgabe: „*Die Aufgabe sieht schwer aus, ist aber einfach.*“ Dies Kennzeichen wurde von rund 75% der Hauptschüler, 80% der Realschüler und 65% der Gymnasiasten angekreuzt. Etwa 65% aller Schüler/innen gaben *Einfachheit* als Merkmal an, ca. 60% kreuzten „*Es sind mehrere Teilaufgaben zu berechnen um die Aufgabe zu lösen.*“ an, und ca. 55% „*Die Aufgabenstellung kenne ich bereits.*“

Realitätsbezug („*Die Aufgabe hat mit alltäglichen Dingen zu tun.*“) ist ein weiteres wichtiges Merkmal schöner mathematischer Aufgaben, angegeben von rund 60% der Hauptschüler, 70% der Realschüler und 75% der Gymnasiasten. Auch der *Überraschungseffekt* („*Die Lösung der Aufgabe ist überraschend.*“) ist von der Mehrheit der Schüler/innen (ca. 60%) als Merkmal einer schönen Aufgabe angegeben worden.

Freitextangaben der befragten Schüler/innen deuten darauf hin, dass ein *Gefühl von Sicherheit und Erfolg* mit über den empfundenen Schönheitsgrad einer Aufgabe entscheiden: Eine schöne Aufgabe sollte einfach sein, im Sinne von „einfach genug, um vom Schüler gelöst werden zu können“,

allerdings nicht zu einfach, denn dies wäre langweilig – eine Aufgabe ist schöner, wenn man überlegen muss, wenn mehrere Teilschritte erforderlich sind. Natürlich ist der Grad der Einfachheit/Komplexität einer schönen Aufgabe abhängig von der jeweiligen Leistungsstärke des Lernenden.

Bezüglich des *Aufgabentyps* zeigen sich ohne weitere Differenzierung keine eindeutigen Präferenzen hinsichtlich des Aspekts „schöne Aufgabe“. Es können nur Tendenzen angegeben werden: Für 50% - 60% aller Schüler/innen sind Spiele, Zeichenaufgaben und Scherzaufgaben schöne Aufgaben, für 40% - 50% aller Schüler/innen Textaufgaben, Rechen-/Päckchenaufgaben, Denk-/Knobelaufgaben und für 28% - 40% aller Schüler/innen Projektaufgaben bzw. Schätzaufgaben (bei durchschnittlich etwas mehr als 3 Nennungen pro Schüler/in). Unter Berücksichtigung der Altersgruppe der Schüler/innen bzw. der Schulform zeigt sich, dass *Spiele* von über 90% der Fünft- und Sechstklässler angegeben werden, *Zeichenaufgaben* insbesondere von jüngeren Schüler/innen an Haupt- und Realschulen, *Denk-/Knobelaufgaben* insbesondere von jüngeren Schüler/innen an Gymnasien.

Die in den Studien befragten Schüler/innen der Sek. I haben größtenteils Aufgabenbeispiele aus denjenigen Inhaltsbereichen angegeben, die zeitnah vorher in der Schule behandelt worden sind; die im Rahmen des Projekts zusammengetragenen schönsten Aufgaben lassen sich allerdings *verschiedensten mathematischen Inhalten und Inhaltsbereichen*, die in den unterschiedlichen Jahrgangsstufen in der Schule behandelt werden, zuordnen. Die vorkommenden *nichtmathematischen Inhaltsbereiche* sind sehr *vielfältig*: Tiere (insbesondere bei jüngeren Schüler/innen), Sport, Comicsfiguren (Asterix u. a.), witzige Personen, Filmhelden, Wahrheit, Gerechtigkeit, Lebensmittel u. v. a. m. Der Nützlichkeitsaspekt ist dabei nicht vorrangig; witzige, scharmante, phantasievolle, nicht alltägliche Darstellungsweisen kennzeichnen die eingesendeten Aufgaben. Als schön erscheinen insbesondere auch *in Geschichten verpackte Aufgaben* und *die Aufgabe selber eine Aufgabe zu konstruieren*. Besonders reizvoll sind Aufgaben, deren Lösungen *der menschlichen Intuition widersprechen*.

Literatur

Brinkmann, A. (2006). Erfahrung mathematischer Schönheit. In A. Büchter, H. Humenberger, S. Hußmann, S. Prediger (Hrsg.), *Realitätsnaher Mathematikunterricht – von Fach aus und für die Praxis. Festschrift für Hans-Wolfgang Henn zum 60. Geburtstag*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, 203–213.

Brinkmann, A. & Sriraman, B. (2009). Aesthetics and Creativity: An Exploration of the Relationships between the Constructs. Erscheint in: B. Sriraman, S. Goodchild (Eds.) *Festschrift celebrating Paul Ernest's 65th Birthday*. Information Age Publishing.

Folien zum Vortrag: <http://www.math-edu.de/Vortraege.html>