

Nils BUCHHOLTZ & Björn SCHWARZ, Hamburg

Vergleich des mathematischen und fachdidaktischen Wissens zum Thema "Argumentieren und Beweisen" von Lehramtsstudierenden in Deutschland, Hongkong und Australien

1. Design der Studie

Die hier vorgestellte Studie ist eine qualitative Vertiefungs- und Ergänzungsstudie zu der internationalen Vergleichsstudie MT21 (Mathematics Teaching in the 21st Century), die die Wirksamkeit der Mathematiklehrerbildung in den Blick nimmt.

Die Ergänzungsstudie wurde in Hongkong, VR China, Taiwan, Australien und Deutschland durchgeführt und fokussiert die Mikroebene von MT21, d.h. den individuellen Kompetenzerwerb in der universitären Phase der Lehrerbildung.

Konkret werden umfangreiche Aussagen von Lehramtsstudierenden ausgewertet, die Aufschluss darüber geben, wie das von Lehramtsstudierenden während ihrer Ausbildung erworbene Professionswissen konstituiert ist und in welcher Form Verknüpfungen zwischen einzelnen Bereichen dieses Professionswissens erkennbar sind.

Den theoretischen Hintergrund liefert dabei die Konzeptionalisierung des professionellen Wissens von Lehrerinnen und Lehrern nach Shulman (1986) in Ergänzung durch Bromme (1995), ergänzt durch die Einbeziehung der Konzeption der mathematischen und mathematikdidaktischen Beliefs nach Grigutsch, Raatz und Törner (1998).

Befragt wurden im deutschen Sample 79 Lehramtsstudierende aus Studiengängen für alle Schulstufen mittels eines Fragebogens mit domänenübergreifenden offenen Aufgaben. Im Hongkonger Sample beläuft sich die Zahl der Probandinnen und Probanden auf 84, im australischen Sample nahmen 46 Lehramtsstudierende an der Befragung teil.

Die Auswertung der Fragebögen erfolgte mit der Methode der qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2000), genauer mittels Rückgriffs auf die Methode der strukturierenden Inhaltsanalyse (deduktive Kategorienanwendung, skalierendes Strukturieren).

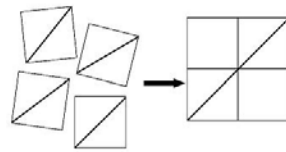
Erste Ergebnisse sind bereits veröffentlicht (Schwarz, Kaiser & Buchholtz, 2008; Schwarz et al., 2008).

2. Mathematischer und fachdidaktischer Inhalt zum Argumentieren und Beweisen

Den Probandinnen und Probanden war im Rahmen der Befragung folgende Aufgabe gestellt worden:

Betrachten Sie den folgenden Satz:

Verdoppelt man die Seitenlängen eines Quadrats, so verdoppelt sich auch die Länge jeder Diagonale.



Folgender präformaler Beweis ist gegeben:

Man verwendet quadratische Plättchen, die gleich groß sind. Legt man vier Plättchen zu einem Quadrat, erhält man ein Quadrat, dessen Seitenlängen doppelt so lang sind wie die eines Plättchens. Man erkennt sofort, dass auch jede Diagonale doppelt so lang ist wie die eines Plättchens, da jeweils zwei Diagonalen von zwei Plättchen direkt aneinander stoßen.

Die Unterscheidung zwischen einem formalen und einem präformalen Beweis innerhalb dieser Aufgabe ist sehr bedeutungsvoll und gibt in den Ergebnissen auch Aufschluss über länderspezifische Unterschiede sowohl im Fachwissen als auch im fachdidaktischen Wissen.

Auf den Bereich des *fachmathematischen Wissens* erstrecken sich dabei folgende Teilaufgaben:

- b) Formulieren Sie einen formalen Beweis für den obigen Satz
- f) Können der präformale und der formale Beweis des [...] Satzes über die Länge der Diagonalen eines Quadrats jeweils auf beliebige Rechtecke verallgemeinert werden? Bitte begründen Sie kurz.

Auf den Bereich des *fachdidaktischen Wissens* erstrecken sich folgende Teilaufgaben:

- d) Kann ein präformaler Beweis als einzige Beweisform im Mathematikunterricht ausreichend sein? Bitte begründen Sie Ihre Position!
- e) Benennen Sie kurz die Vor- und Nachteile eines formalen und eines präformalen Beweises!

In der Auswertung der Ergebnisse wurden gemäß dem Antwortverhalten der Probandinnen und Probanden zunächst quantitativ die absoluten Häufigkeiten der Codierungen für jedes Sample separat erfasst und in Hinblick auf Besonderheiten im Anschluss qualitativ untersucht. Aus diesem Vergleich der drei Samples konnten daraufhin individuelle Charakteristika der einzelnen Samples herausgestellt werden.

3. Zusammenhang des Fachwissens und des fachdidaktischen Wissens im Bereich „Argumentieren und Beweisen“ in den einzelnen Samples

Das deutsche Sample zeichnet sich im fachmathematischen Teil durch deutliche Präferenzen für das präformale Beweisen aus. Oft waren die Studierenden einerseits nicht in der Lage, einen korrekten formalen Beweis zu führen, andererseits wurde die Verallgemeinerbarkeit des formalen Beweises manchmal nicht erkannt oder es wurde nur der präformale Beweis verallgemeinert. Diese Präferenz für das präformale Beweisen setzt sich – im Gegensatz zu Präferenzen im Hongkonger Sample – angefangen im unteren Leistungsbereich im oberen Leistungsbereich fort. Die Defizite im Fachwissen führen aber nicht unbedingt dazu, dass dem präformalen Beweisen in der didaktischen Reflexion eine Vorrangstellung eingeräumt wird. Erwartungen, dass die fachdidaktische Reflexion über die Nützlichkeit des präformalen Beweises die fachdidaktische Reflexion über die Notwendigkeit der Vermittlung des formalen Beweises in den Hintergrund treten lässt, bestätigten sich nicht. Es zeigte sich vielmehr, dass sich die Studierenden über die verschiedenen Niveaustufen der Beweise durchaus im Klaren sind und den Einsatz von präformalen und formalen Beweisen von den kognitiven Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler abhängig machen. Hier wird die didaktische Reflexion also nicht durch das Fachwissen dominiert, sondern eher durch schülerorientierte fachdidaktische Überlegungen wie etwa Anschaulichkeit und Verständnisförderung, aber auch die Gefahr, durch das präformale Beweisen verfrüht Evidenzen als Beweise zu akzeptieren, bestimmt.

Das Hongkonger Sample zeigt diesbezüglich ein anderes Bild. Das fachmathematische Wissen zeigt sich hier von allen drei Samples am deutlichsten ausgeprägt, formales Beweisen bereitete den Probandinnen und Probanden kaum Probleme. Diese starke Ausprägung des Fachwissens ist es denn allerdings auch, die die fachdidaktischen Überlegungen zum präformalen und formalen Beweisen stark beeinflusst. Es zeigte sich eine deutliche Präferenz des formalen Beweises im Fachwissen und auch im fachdidaktischen Wissen. Die didaktische Reflexion über den Einsatz von präformalen und formalen Beweisen erfolgt im Kontext der Fachmathematik, also des

Fachwissens. Präformale Beweise sind dementsprechend zwar bekannt und werden – vor allem im oberen Leistungsbereich – auch wegen ihrer Einfachheit geschätzt, nicht ohne jedoch durch einen formalen Beweis ergänzt zu werden, der im Sinne einer Vermittlung eines formalen Mathematikbildes seine didaktische Berechtigung erhebt. Im unteren Leistungsbereich sind dabei sowohl die fachmathematischen als auch die fachdidaktischen Überlegungen von der Ansicht geprägt, präformales Beweisen sei kein wissenschaftlich angemessenes mathematisches Vorgehen und sollte deshalb auch nicht im Unterricht thematisiert werden.

Das australische Sample zeigt ebenfalls eine deutliche Ausprägung des Fachwissens, allerdings lässt sich keine eindeutige Präferenz für eine bestimmte Beweisart ausmachen. Der Einfluss des stark ausgeprägten fachlichen Wissens auf das fachdidaktische Wissen lässt sich dennoch dahingehend feststellen, dass die fachdidaktischen Überlegungen zum präformalen Beweisen zwar aus einer Perspektive der Lernenden als für Schüler(innen) sehr nützlich angesehen werden, ihre Bewertung aber letztendlich auch im Kontext der Vermittlung eines formalen Mathematikbildes geschieht, da das formale Beweisen als eine unabdingbare Ergänzung zum präformalen Beweisen angesehen wird.

Literatur

- Bromme, R. (1995). What exactly is 'pedagogical content knowledge'?—Critical remarks regarding a fruitful research program. In S. Hopmann & K. Riquarts (Eds.), *Didaktik and/or Curriculum* (pp. 205–216). Kiel: IPN.
- Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19 (1), 3–45.
- Mayring, P. (2000). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.
- Schwarz, B., Kaiser, G. & Buchholtz, N. (2008). Vertiefende qualitative Analysen zur professionellen Kompetenz am Beispiel von Modellierung und Realitätsbezüge. In: Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (Hrsg.). *Professionelle Kompetenz angehenden Lehrerinnen und Lehrer – Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und –referendare – Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung*. Münster: Waxmann Verlag (S. 391 - 424).
- Schwarz, B., Leung, I. K. C., Buchholtz, N., Kaiser, G., Stillman, G., Brown, J., Vale, C. (2008). Future teachers' professional knowledge on argumentation and proof: a case study from universities in three countries. In: *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* 40 (5) (S. 791-811).
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.