Michael BÜRKER, Freiburg

Die Finanzkrise als Impuls für mathematikdidaktische Überlegungen

1. Einleitung:

Die Folgen der Finanzkrise bekommen die Menschen weltweit in Form einer tiefgreifenden Wirtschaftskrise mit all ihren Erscheinungen wie Kurzarbeit, erhöhter Arbeitslosigkeit und wirtschaftlichem Rückgang zu spüren. Wir können zwar in diesem Vortrag dem äußerst komplizierten Ursachengeflecht dieser Krise nicht nachgehen. Einige Punkte seien aber kurz skizziert:

- Immobilienkrise in den USA
- Psychologische Faktoren wie Geld- und Profitgier
- Hohe Komplexität bei Geldanlagen und im Kreditwesen
- Hohe Bereitschaft für riskante Geldanlagen bei Bankmanagern
- Fehlendes Fachwissen bei den Verantwortlichen
- Mangelhafte Vorschriften und Kontrollstrukturen im Finanzsystem

Die Frage besteht für uns Mathematikdidaktiker, was wir in Schule und Hochschule Tätigen tun können, um langfristig und nachhaltig den genannten Punkten entgegenwirken zu können. Unsere Möglichkeiten sind in dieser Beziehung sicher sehr begrenzt. Zwei Ebenen, auf denen wir tätig werden können, sollen hervorgehoben werden.

Zum Einen eine allgemeine psychologisch-bildungswissenschaftliche Ebene:

Bildung ist grundsätzlich der wissenschaftlichen Redlichkeit verpflichtet und transportiert im Kern ethisch motivierte Grundsätze mit, z. B. im Fach Ethik oder Religion die Frage nach der Profitgier. Auch im Fach Mathematik tragen wir dazu bei, wissenschaftliche Redlichkeit vorzuleben und an die Jugendlichen weiterzugeben: Zum Beispiel ist das Aufstellen von Behauptungen an strenge Regeln des Beweisens geknüpft. Dies unterstützt das allgemeine Bildungsziel, die Schülerinnen und Schüler zu mündigen und verantwortlich denkenden Menschen in einer immer komplizierteren Welt zu erziehen.

Zum Anderen können wir auf der fachlichen Ebene mindestens auf einem der Schule angepassten Niveau elementare Finanzströme untersuchen und modellieren. Darum soll es in diesem Vortrag gehen. Genauer geht es darum, die Modellierungswerkzeuge für Spar- und Tilgungsvorgänge zu schärfen, sowohl unter dem Einsatz von Rechenhilfsmitteln wie dynamischer Geometrie-Software als auch ohne diese in Form von überschlägigen Faustregeln, die es erlauben, die Verdopplungszeit von Geldanlagen und die Tilgungszeit eines Darlehens in Sekundenschnelle wenigstens abzuschätzen.

Empirische Grundlage dieses Vortrags ist ein Unterrichtsversuch zweier Studierender in meinem Seminar „Medieneinsatz im Mathematikunterricht", durchgeführt im Februar 2009 am Berthold-Gymnasium Freiburg in einer 13. Klasse. Thematisch wurde außerdem eine Aufgabe des baden-württembergischen Zentralabiturs aus dem Jahr 2000 herangezogen, in der es um die Tilgungszeit eines Darlehens ging.

2. Faustregeln bei Sparvorgängen

Für die Verdopplungszeit bei Sparvorgängen mit Zinseszins (Zinssatz p%) erhält man bekanntlich die Gleichung $2 = 1 \cdot (1 + p\%)^n$ und daraus $n = \ln 2 / \ln(1 + p\%)$. Bei kleinem p ($p < 10$) kann $\ln(1 + p\%)$ näherungsweise durch $p\%$ ersetzt werden, wodurch sich für kleine p die Faustformel

$$\textbf{Verdopplungszeit} \approx \mathbf{70/p}$$

ergibt .

Bei einem Zinssatz von 5% erhält man daher eine Verdopplungszeit von rund 14 Jahren (genauer Wert 14,2). Diese Faustformel können wir später bei Tilgungsvorgängen nutzen, weil wir einen Tilgungsvorgang auf einen Sparvorgang zurückführen.

3. Sparvorgänge mit regelmäßiger Sparrate

Ist a_0 das Anfangsguthaben, p% der Jahreszinssatz, r die Sparrate am Ende eines jeden Jahres, so erhält man das Guthaben a_n nach n Jahren mit Hilfe der Formel (wir schreiben im Folgenden p_ an Stelle von p%):

$$a_n = (a_0 + r / p\_) \cdot (1 + p\_)^n - r / p\_.$$

Normalerweise wird diese Formel mit Hilfe der abbrechenden geometrischen Reihe hergeleitet. Da wir die obige Formel auch für die 10. Klassenstufe herleiten wollen, vermeiden wir die geometrische Reihe und benutzen außer elementaren algebraischen Umformungen nur die explizite Formel für das exponentielle Wachstum.

Rekursiver Ansatz: $a_{n+1} = a_n + a_n \cdot p\_ + r$

p_ vor die Klammer: $= a_n + p\_ \cdot (a_n + r/p\_)$

Addieren von $r/p\_$ auf beiden Seiten der Gleichung:

$$a_{n+1} + r/p\_ = a_n + r/p\_ + p\_\cdot(a_n + r/p\_)$$

$a_n + r/p_$vor die Klammer: $$a_{n+1} + r/p\_ = (a_n + r/p)\_ \cdot(1 + p\_)$$

Dies ist eine rein multiplikative Rekursionsgleichung wie beim exponentiellen Wachstum, womit man

$$a_n + r/p\_ = (a_0 + r/p\_)(1 + p\_)^n$$

oder (*) $$a_n = (a_0 + r/p\_)(1 + p\_)^n - r/p\_$$

erhält. Wir können dies als einen einfachen Sparvorgang ohne Sparrate mit dem Anfangsguthaben $a_0 + r/p\_$ interpretieren, bei dem wir „am Schluss“ noch $r/p\_$ abziehen. Wir können also unsere Faustformel für die Verdopplung nach 70/p Jahren heranziehen. Legt jemand z. B. 1000 Euro an und zahlt jährlich 100 Euro bei einem Zinssatz von $p\_ = 5\%$ ein, so ist $r/p\_ = 2000$. Das Anfangsguthaben ist $a_0 + r/p\_ = 3000$. Es verdoppelt sich nach ca. 14 Jahren. Das Guthaben beträgt nach rund 14 Jahren gemäß Formel (*) rund 6000 € - 2000 €, also 4000 €.

3. Tilgungsvorgänge

Bei Tilgungsvorgängen ist r die Rückzahlrate am Ende eines jeden Jahres und a_n der Restschuldenstand nach n Jahren. Die Rekursionsgleichung lautet dann $$a_{n+1} = a_n + p\_\cdot a_n - r.$$

Die explizite Form ergibt sich aus der Gleichung (*), indem wir r durch –r ersetzen: (*-) $$a_n = (a_0 - r/p\_)(1 + p\_)^n + r/p\_.$$

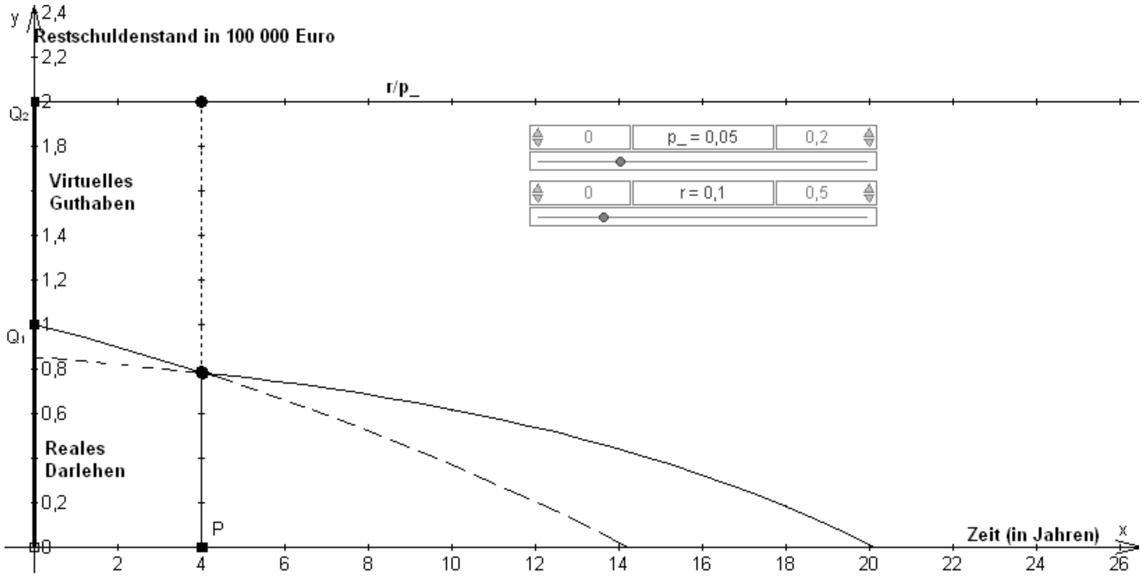
Diese Formel wurde den Schülerinnen und Schülern mit etwas anderen Bezeichnungen mitgeteilt, und zwar ohne Herleitung, weil die obige kurze Herleitung noch nicht bekannt war. Zur Einstimmung in die Thematik wurde den Schülern des Kurses ein Film mit dem Titel „Die Simpleshow erklärt die Finanzkrise“ gezeigt [1]. In diesem Film wird der Fall eines (fiktiven) Angestellten Klaus in einer Kleinstadt in den USA vorgestellt, der wie die meisten Personen in den USA sehr leicht, d. h. ohne Eigenkapital an einen Kredit für den Kauf eines Hauses kommt. Die Bank hat als Sicherheit nur, dass der Kreditnehmer im Moment der Kreditaufnahme einen Arbeitsplatz mit einem regelmäßigen Einkommen hat, außerdem den Immobilienwert des Hauses. Solange die Immobilienwerte steigen, ist dies kein Problem. Aber wenn diese sinken, erhöht die Bank die Zinsen. Kommt noch eine Erhöhung der Zinsen auf dem Finanzmarkt dazu, kann dies fatale Folgen für den Kreditnehmer haben. Dies kann mit dynamischer Geometrie-Software mit Hilfe der Schieberegler eindrucksvoll dargestellt werden.

Beispiel: Jemand nimmt ein Darlehen von 100 000 Euro bei einem Zinssatz von 5% auf. Er bezahlt am Ende eines jeden Jahres einen Betrag von 10 000 Euro.

a) Bestimme die Tilgungszeit für p_ = 5%.

b) Bestimme die Tilgungszeit, wenn sich nach 4 Jahren der Zinssatz auf 10% erhöht (bei unveränderter Rückzahlrate r).

Es ist r/p_ = 200000. Die Formel für den Restschuldenstand a_n nach n Jahren ist $a_n = (a_0 - r/p\_)(1+p\_)^n + r/p\_$.



Die Differenz r/p_ - a_0 (in unserem Beispiel 100000 Euro, anschaulich die Strecke Q_1Q_2) lässt sich als „virtuelles Guthaben“ interpretieren, das exponentiell anwächst. Dieses Guthaben wächst so lange, bis das reale Darlehen vollständig getilgt ist, bei unserem Zahlenbeispiel also, bis sich das virtuelle Guthaben verdoppelt hat. Wir können somit unsere Faustregel verwenden: Die Verdopplungszeit bei p_ = 5% beträgt dann rund 70/p, also 14 Jahre. Dies ist gerade die Tilgungszeit des Darlehens, wie man auch an der gestrichelten Kurve ablesen kann. Mit Dynageo kann man die Erhöhung des Zinssatzes gut modellieren:

Nach 4 Jahren steigt der Zinssatz plötzlich auf 10%, der Schieberegler p_ wird entsprechend eingestellt. Die Kurve zeigt dann einen flacheren Verlauf und die Tilgungszeit ist entsprechend größer, bei diesem Beispiel etwa 20 Jahre.

Literatur:

[1] http://www.videogold.de/die-simpleshow-erklaert-die-finanzkrise/