

Petr EISENMANN, Ústí n. L. (Tschechische Republik)

Ein Beitrag zur Entwicklung funktionalen Denkens der Studenten

Der Goldberg (Zlatý vrch, 657 m) bei Böhmisches-Kamnitz in Nordböhmen ist eine auffällige Bergkuppe und traditionelles Ziel bei Streifzügen im Lausitzer Gebirge. Wahrscheinlich um 1870 wurde an seinem südöstlichen Abhang ein Steinbruch angelegt. Die in ihm aufgeschlossenen Basaltsäulen waren gut entwickelt und nur wenig zersprungen, so dass man hier bis zu 6 m lange Stücke brechen konnte. Wegen der großen Beständigkeit des Basaltes gegen Meerwasser sollen sie nach Holland zum Bau von Pieren ausgeführt worden sein. Endgültig wurde das Brechen der Säulen im Jahre 1973 eingestellt, als der Abbau so weit fortgeschritten war, dass eine einheitliche Steinbruchwand mit bis zu 30 m langen, vollkommen entwickelten Basaltsäulen erreicht war. Heute ist der Steinbruch schon aufgelassen, der Goldberg steht unter Naturschutz und seit 2002 führt an ihm der Naturlehrpfad " Rund um den Kaltenberg " (Okolím Studence) vorbei.

Der Mathematiker kann sich beim Anblick der Form der Basaltsäulen (s. Abb. 1) vorstellen: „Hier steht vor mir eine Funktionsschar.“ In diesem Beitrag wird versucht, diese Funktionen durch eine Vorschrift zu beschreiben. Wir werden dabei nur die Elementarkennnisse aus der Differentialrechnung der Funktionen einer Veränderlichen voraussetzen (s. z. B. Jahnke & Wuttke, 2002).

Die einfachste Variante ist, eine ganze rationale Funktion, also eine Polynomfunktion, zu benutzen. Hinsichtlich der Form der Basaltsäulen kann hier ein Polynom dritten Grades genügen, also

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d .$$

Plazieren wir die Wendestelle der Funktion y in den Nullpunkt. Daraus folgt

$$y(0) = 0 , \text{ also } d = 0 .$$

Die Funktion y muss offensichtlich streng monoton steigend sein. Ihre Ableitung

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

muss also positiv sein. Das können wir einfach folgenderweise erzielen:

$$b = 0 , a > 0 , c > 0 .$$



Abb. 1

Diesen Bedingungen entspricht auch die nächste Forderung: Der Graph von der Funktion y muss über dem Intervall $(-\infty, 0)$ rechtsgekrümmt und über dem Intervall $(0, \infty)$ linksgekrümmt sein. Es muss also gelten

$$y'' = 6ax < 0 \quad \text{für alle } x < 0$$

$$y'' = 6ax > 0 \quad \text{für alle } x > 0 .$$

Aus Abb. 1 ist ersichtlich, dass die Tangente an den Graphen von y im Nullpunkt mit der positiven Richtung der x -Achse den Winkel ungefähr 70° einschließen sollte. Es soll annähernd gelten

$$y'(0) = \operatorname{tg} 70^\circ .$$

Daraus folgt $c = 3$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet also bisher:

$$y = ax^3 + 3x .$$

Zur Bestimmung von a benutzen wir im Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe das Programm Mathematica. So bestimmten wir $a = 0,05$. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet also:

$$y = 0,05x^3 + 3x .$$

Als abschließenden Schritt müssen wir jetzt aus dieser Funktion eine Funktionsschar konstruieren, die der Abb. 1 entspricht. Die Ableitung der Funktion y (also auch die Steigung der Tangente an den Graphen von dieser Funktion) ist für alle $x \in \mathbb{R}$ größer als 1. Den Scharparameter müssen wir also in das Argument einlegen. Die Funktionsgleichungen haben also die Form

$$y = 0,05(x+n)^3 + 3(x+n)$$

mit dem Scharparameter $n = 0, 1, -1, 2, -2, 3, \dots$. Abb. 2 zeigt einige Graphen dieser Funktionsschar.

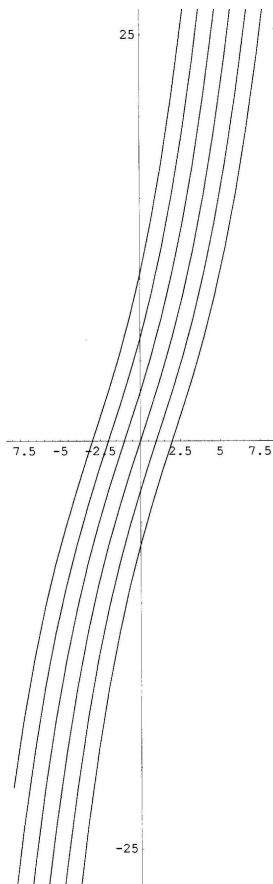


Abb. 2

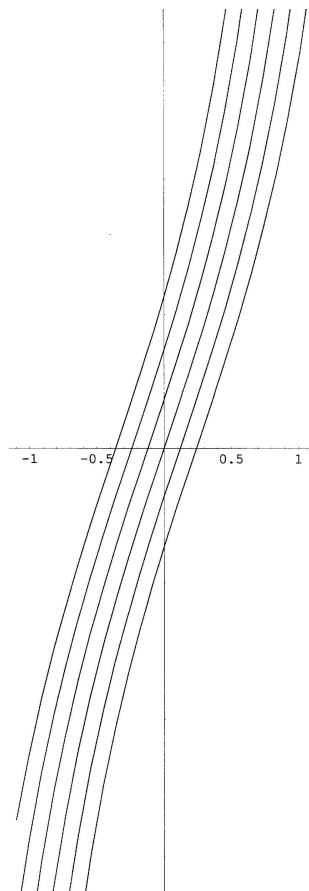


Abb. 3

Eine weitere Variante die Funktionsschar zu wählen, schlugen die Schüler selbst im Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe vor. Sie riefen sich am Ende der vorigen Phase die Tangensfunktion ins Gedächtnis zurück. Diese Funktion erfüllt ohne weitere Modifikationen alle Bedingungen für die gesuchte Abhängigkeit. Die einzig notwendige Korrektur war hier die Änderung der ersten Ableitung im Nullpunkt. Die vorgeschlagenen Funktionsgleichungen haben also die Form

$$y = 3tg(x + n)$$

mit dem Scharparameter $n = 0, 0,1, - 0,1, 0,2, - 0,2, 0,3, \dots$. Abb. 3 zeigt einige Graphen dieser Funktionsschar.

Literatur

Jahnke, Th., Wuttke, H. (2002). *Mathematik. Analysis*. Berlin: Cornelsen.